Devoir nº3 Corrigé

Exercice 1.

1. (a) Énoncer les formules d'Euler.
   (b) Linéariser $\sin^2(\theta)\cos(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. (a) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $|z+2| = |z-2i|$.
   (b) Décrire géométriquement l'ensemble des solutions et le représenter sur un schéma.
3. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{n} \ln(k+2)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$.

Solution :

1. (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a : $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.}$
   (b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

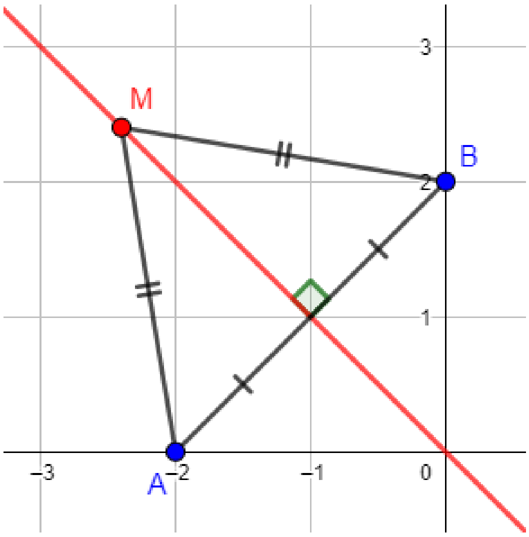
$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta)\cos(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \times \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8i^2} \times \left(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}\right) \times \left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{8} \times \left(e^{3i\theta} - 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} - 2e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{8} \times \left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} - \left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{8} \times \left(2\cos(3\theta) - 2\cos(\theta)\right) \\
&= \boxed{\frac{\cos(\theta)-\cos(3\theta)}{4}.}
\end{aligned}$$

2. (a) Notant $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ on a (puisque $|z+2| \geq 0$ et $|z-2i| \geq 0$) :

$$\begin{aligned}
|z+2| = |z-2i| &\iff |z+2|^2 = |z-2i|^2 \\
&\iff |(x+2)+iy|^2 = |x+i(y-2)|^2 \\
&\iff (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2 \\
&\iff x^2+4x+4+y^2 = x^2+y^2-4y+4 \\
&\iff y = -x
\end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{x - ix,\ x \in \mathbb{R}\}.}$

   (b) Géométriquement, notons A le point d'affixe -2, B le point d'affixe $2i$ et M un point d'affixe z. Alors $|z+2| = AM$ et $|z-2i| = BM$. Ainsi les points M tels que $|z+2| = |z-2i|$ sont les points à égale distance de A et de B. L'ensemble de ces points constitue la médiatrice du segment $[AB]$. C'est aussi la droite d'équation cartésienne $y = -x$.



3. (a) On a

$$\sum_{k=5}^{n} \ln(k+2) = \ln\left(\prod_{k=5}^{n}(k+2)\right) = \ln\left(7 \times 8 \times 9 \times \cdots \times (n+2)\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n+2)}{1 \times 2 \times \cdots \times 6}\right)$$
$$= \boxed{\ln\left(\frac{(n+2)!}{6!}\right)}$$

(b) On a

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$
$$= \frac{(2n+1)!}{\prod_{k=1}^{n} 2k}$$
$$= \frac{(2n+1)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k}$$
$$= \boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}}$$

Exercice 2.

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 2 = 0$.
2. Déterminer la forme exponentielle des solutions trouvées en 1.
3. En déduire les solutions sur $\mathbb{C}$ de : $e^{2z} + 2e^z + 2 = 0$.

Solution :

1. Le discriminant du polynôme $X^2 + 2X + 2$ est $2^2 - 4 \times 2 = -4$ donc il admet deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1 = \dfrac{-2 + i\sqrt{4}}{2} = -1+i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1-i$. Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{-1+i, -1-i\}.}$
2. On calcule que $|z_1| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. On écrit donc que $z_1 = -1+i = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.
   Finalement $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}}$ et par conséquent $z_2 = \overline{z_1} = \boxed{\sqrt{2}\, e^{-3i\pi/4}.}$
3. Pour $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned}
e^{2z} + 2e^z + 2 = 0 &\iff (e^z)^2 + 2e^z + 2 = 0 \\
&\iff \begin{cases} \omega = e^z \\ \omega^2 + 2\omega + 2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \omega = e^z \\ \omega = -1+i \quad \text{ou} \quad \omega = -1-i \end{cases} \\
&\iff \Big(e^z = -1+i \quad \text{ou} \quad e^z = -1-i\Big) \quad (*)
\end{aligned}$$

Utilisant les formes exponentielles calculées à la question 2, et notant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
(*) &\iff \Big(e^{x+iy} = -1-i \quad \text{ou} \quad e^{x+iy} = -1+i\Big) \\
&\iff \Big(e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} \quad \text{ou} \quad e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}\Big) \\
&\iff \Big(\Big(e^x = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}\ : y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(e^x = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}\ : y = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\Big)\Big) \\
&\iff \Big(x = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2) \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}\ : \Big(y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou}\ y = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}' = \left\{\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3i\pi}{4} + 2ik\pi,\ \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{3i\pi}{4} + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

Exercice 3.

Dans cet exercice on cherche à résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 4 + 4i = 0$.

1. Expliquez pourquoi, a priori, la formule du cours avec le discriminant ne s'applique pas ici.
2. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E) si et seulement si $(z-i)^2 = 3 - 4i$.
3. Résoudre l'équation $\omega^2 = 3 - 4i$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution :

1. Si l'on applique la formule du cours permettant de résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1,\ b = -2i$ et $c = -4 + 4i$, il faut calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4(-4+4i) = -4 + 16 - 16i = 12 - 16i$, puis rechercher le signe de Δ. Or $\Delta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, donc parler du signe de Δ n'a pas de sens. En fait la formule du cours s'applique uniquement dans le cas où les coefficients $a,\ b$ et c sont réels. Plus précisément, la formule $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ est encore correcte dans le cas où $a, b, c \in \mathbb{C}$, mais en remplaçant $\pm\sqrt{\Delta}$ par les deux solutions (complexes) de l'équation $z^2 = \Delta$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$ on a :
$$(z-i)^2 = 3 - 4i \iff z^2 - 2iz + i^2 - 3 + 4i = 0 \iff z^2 - 2iz - 4 + 4i = 0.$$
On a donc bien l'équivalence demandée.
3. Notant $\omega = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ on a :
$$\begin{aligned}
\omega^2 = 3 - 4i \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = 3 - 4i \\ |x+iy|^2 = |3-4i| \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \\ 2x^2 = 8 \quad (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y^2 = x^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ xy = -2 \\ x^2 = 4 \quad (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 1 \ \text{ ou } \ y = -1 \\ xy = -2 \\ x = \sqrt{4} = 2 \ \text{ ou } \ x = -2 \end{cases} \\
&\iff \big(x = 2 \ \text{ et } \ y = -1\big) \ \text{ ou } \ \big(x = -2 \ \text{ et } \ y = 1\big) \\
&\iff \omega = 2 - i \ \text{ ou } \ \omega = -2 + i
\end{aligned}$$
où l'avant-dernière équivalence vient du fait que le produit xy doit être positif, donc x et y de même signe. Finalement l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{2 - i, -2 + i\}.}$
4. Pour $z \in \mathbb{C}$ on a donc :
$$\begin{aligned}
z^2 - 2iz - 4 + 4i = 0 &\iff (z - i)^2 = 3 - 4i \\
&\iff z - i = 2 - i \ \text{ ou } \ z - i = -2 + i \\
&\iff z = 2 \ \text{ ou } \ z = -2 + 2i
\end{aligned}$$
où la première équivalence découle de la question 2, et la deuxième de la question 3. Finalement l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\mathcal{S}' = \{2,\ -2 + 2i\}.}$

Exercice 4.
Dans cet exercice, on étudie de trois manières différentes la suite complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$z_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = iz_n + 3 - i.$$

1. *En revenant aux suites réelles.*
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \mathcal{R}e(z_n),\ y_n = \mathcal{I}m(z_n)$ et $a_n = x_n - 2$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n.
   (b) Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre deux suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -a_n$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.
2. *En s'inspirant des suites arithmético-géométriques.*
   (a) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z = iz+3-i$. On note ℓ la solution trouvée, qu'on exprimera sous forme algébrique.
   (b) Que peut-on dire de la suite $(w_n)_{n\geq 0} = (z_n - \ell)_{n\geq 0}$?
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 2 + i - i^{n+1}$, puis retrouver le résultat de la question 1(c).
3. *Géométriquement.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note M_n le point du plan d'affixe z_n.
   (a) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4, et placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 sur un schéma.
   (b) Si M est un point d'affixe z, comment obtenir géométriquement le point M' d'affixe iz ? le point M'' d'affixe $iz + 3 - i$?
   (c) D'après le schéma, que peut-on dire pour tout $n \in \mathbb{N}$ de M_n et M_{n+4} ? Par conséquent où se situe le point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$?
   (d) Retrouver le résultat de la question 3(c) en utilisant la formule de la question 1(c).

Solution :

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= iz_n + 3 - i \\ &= i(x_n + iy_n) + 3 - i \\ &= (3 - y_n) + i(x_n - 1) \end{aligned}$$

   donc $\boxed{x_{n+1} = 3 - y_n \text{ et } y_{n+1} = x_n - 1.}$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on calcule que :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= x_{n+2} - 2 \\ &= (3 - y_{n+1}) - 2 \\ &= 1 - y_{n+1} \\ &= 1 - (x_n - 1) \\ &= 2 - x_n \\ &= -a_n. \end{aligned}$$

   (c) Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence satisfaite par la suite (a_n) est $P(X) = X^2 + 1$. Ses racines sont i et $-i$. Comme la forme exponentielle de i est $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$ on en déduit que :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

On utilise alors les valeurs de $a_0 = x_0 - 2 = 0$ et $a_1 = x_1 - 2 = (3 - y_0) - 2 = (3-0) - 2 = 1$ pour déterminer λ et μ :

$$\begin{cases} a_0 = \lambda\cos(0) + \mu\sin(0) \\ a_1 = \lambda\cos(\pi/2) + \mu\sin(\pi/2) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, donc $x_n = a_n + 2 = 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
Et comme $x_{n+1} = 3 - y_n$ on a :

$$\begin{aligned} y_n = 3 - x_{n+1} &= 3 - \left(2 + \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

(en utilisant dans la dernière égalité que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$).

Finalement : $\boxed{z_n = x_n + iy_n = 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).}$

2. (a) Pour $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$z = iz + 3 - i \iff (1-i)z = 3 - i \iff z = \frac{3-i}{1-i}.$$

Or $\frac{3-i}{1-i} = \frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+1+3i-i}{1^2+1^2} = 2+i$. Ainsi $\boxed{\ell = 2+i.}$

(b) $\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est géométrique de raison (complexe) } i.}$ En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= z_{n+1} - (2+i) \\ &= iz_n + 3 - i - 2 - i \\ &= iz_n + 1 - 2i \end{aligned}$$

Là où

$$\begin{aligned} iw_n &= i(z_n - (2+i)) \\ &= iz_n - 2i + 1 \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = iw_n$.

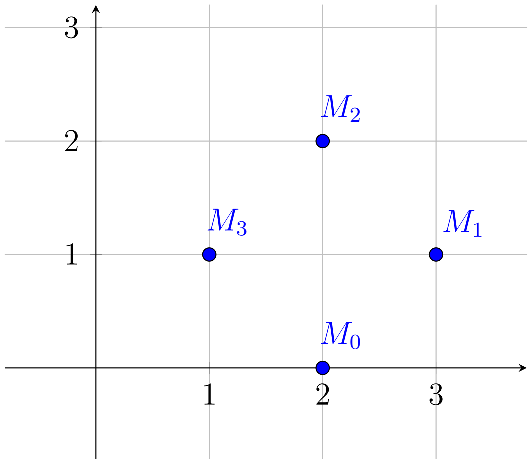
(c) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 i^n$. Or $w_0 = z_0 - (2+i) = 2 - 2 - i = -i$ donc $w_n = -i^{n+1}$ et donc $\boxed{z_n = w_n + 2 + i = 2 + i - i^{n+1}.}$

Pour retrouver la formule de la question 1(c), on écrit :

$$\begin{aligned} z_n = 2 + i - i^{n+1} &= 2 + i - i \times i^n \\ &= 2 + i - i \times \left(e^{i\pi/2}\right)^n \\ &= 2 + i - i \times e^{in\pi/2} \\ &= 2 + i - i \times (\cos(n\pi/2) + i\sin(n\pi/2)) \\ &= 2 + i - i\cos(n\pi/2) + \sin(n\pi/2) \\ &= 2 + \sin(n\pi/2) + i(1 - \cos(n\pi/2)). \end{aligned}$$

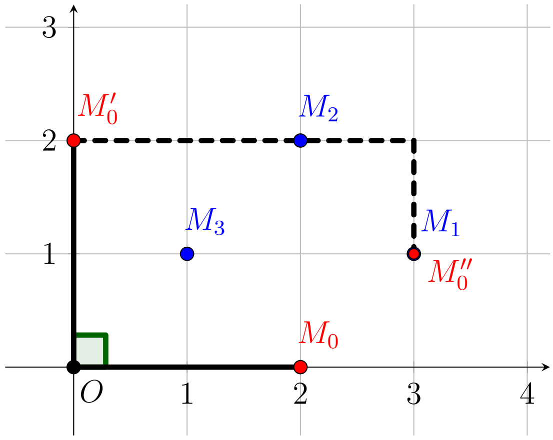
3. (a) On calcule successivement :

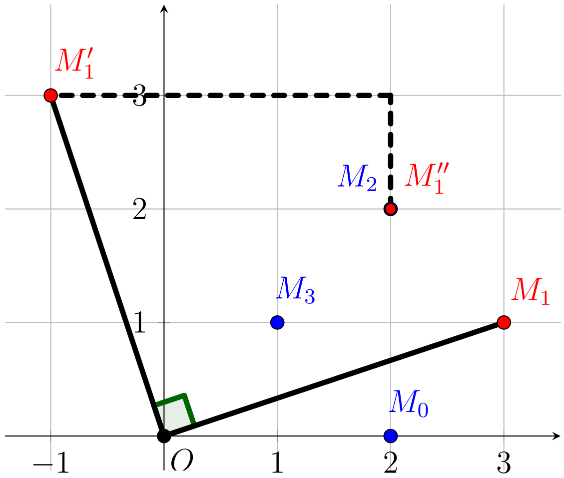
- $z_1 = iz_0 + 3 - i = 2i + 3 - i = \boxed{3+i}$,
- $z_2 = iz_1 + 3 - i = i(3+i) + 3 - i = \boxed{2+2i}$,
- $z_3 = iz_2 + 3 - i = i(2+2i) + 3 - i = \boxed{1+i}$, et
- $z_4 = iz_3 + 3 - i = i(1+i) + 3 - i = \boxed{2.}$

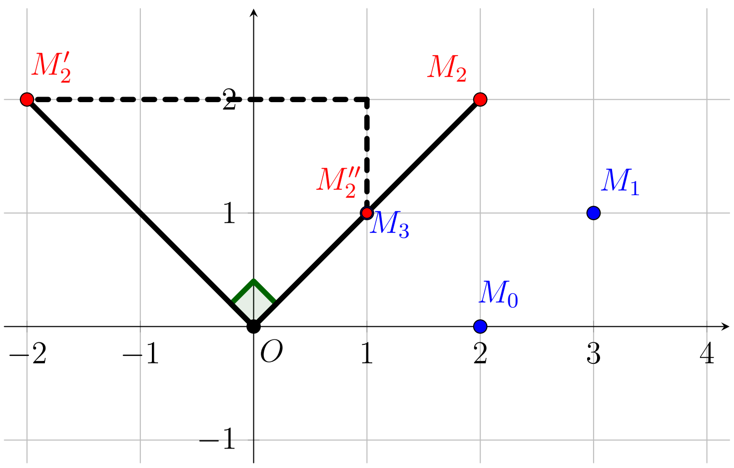


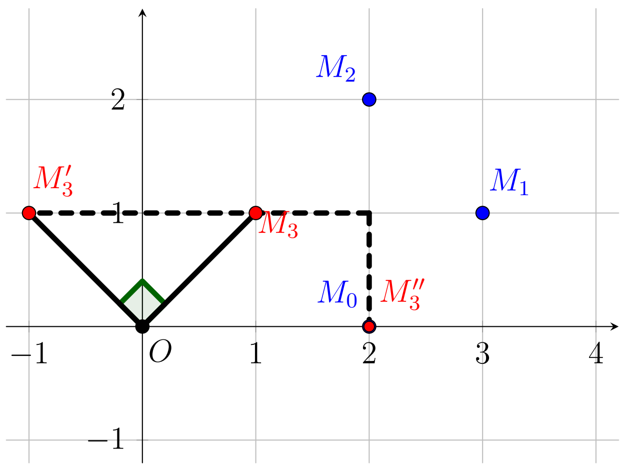
(b) Si M est d'affixe z, alors le point M' d'affixe $z' = iz = e^{i\pi/2}z$ s'obtient par une $\boxed{\text{rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}}$ depuis M. Le point M'' d'affixe $z'' = iz + 3 - i = z' + 3 - i$ s'obtient par une $\boxed{\text{translation de vecteur } (3, -1)}$ (i.e. $+3$ vers la droite, et -1 vers le bas) depuis le point M'.

(c) D'après la question précédente, on passe du point M_n au point M_{n+1} en effectuant une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ puis une translation de vecteur $(3, -1)$. En répétant 4 fois ces opérations, on passe donc du point M_n au point M_{n+4}. Géométriquement, on constate alors qu'effectuer 4 fois ces opérations depuis le point M_n nous ramène au point M_n lui-même. Ainsi : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M_n = M_{n+4}.}$









Par conséquent, le point M_n se situe :

- au niveau du point M_0 s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$,
- au niveau du point M_1 s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k + 1$,
- au niveau du point M_2 s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k + 2$, et
- au niveau du point M_3 s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k + 3$.

(d) D'après la formule de la question 1(c), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} z_{n+4} &= 2 + \sin\left(\frac{(n+4)\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{(n+4)\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right)\right) \\ &= 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\ &= z_n \end{aligned}$$

donc M_{n+4} et M_n ont la même affixe donc sont égaux.

Exercice 5.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $\min(a,b)$ (respectivement $\max(a,b)$) le plus petit élément (respectivement le plus grand élément) entre a et b. En d'autres termes :

$$\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases} \quad \text{et} \quad \max(a,b) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq b \\ a & \text{si } a > b \end{cases}$$

Dans cet exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on souhaite calculer les sommes

$$S_n = \sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=n}^{3n} \max(k, 2n).$$

1. (a) Calculer la somme $\sum_{k=n}^{2n} k$.
   (b) Pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq 3n$, calculer la somme $\sum_{k=p}^{3n} 2n$.
   (c) En effectuant un découpage judicieux, déduire des deux questions précédentes que $S_n = \frac{n(7n+3)}{2}$.
2. En effectuant un découpage similaire à celui de la question 1, déterminer la valeur de T_n.
3. Dans cette question, on propose de retrouver la valeur de T_n trouvée à la question 2 par un autre argument.
   (a) Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a : $\min(a,b) + \max(a,b) = a + b$.
   (b) En déduire la valeur de $S_n + T_n$.
   (c) Retrouver alors la valeur de T_n en utilisant celle de S_n.
4. *Question bonus (ne sera corrigée que si toutes les questions précédentes sont traitées proprement) :* calculer pour $n \in \mathbb{N}$ les sommes doubles suivantes : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$ et $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \max(i,j)$.
5. *Question super bonus (ne sera corrigée que si toutes les questions précédentes sont traitées proprement) :* calculer pour $n \in \mathbb{N}$ la somme triple suivante : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \min(i,j,k)$.

Solution :

1. (a) On a $\sum_{k=n}^{2n} k = \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(4n+2-n+1)}{2} = \boxed{\frac{3n(n+1)}{2}}.$
   (b) On a $\sum_{k=p}^{3n} 2n = \boxed{2n \times (3n-p+1).}$
   (c) On découpe la somme S_n de la manière suivante :

$$S_n = \sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n) = \sum_{k=n}^{2n} \min(k, 2n) + \sum_{k=2n+1}^{3n} \min(k, 2n)$$

   puis on remarque que si $k \in [\![n, 2n]\!]$ alors $\min(k, 2n) = k$, tandis que si $k \in [\![2n+1, 3n]\!]$ alors $\min(k, 2n) = 2n$. Ainsi

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} k + \sum_{k=2n+1}^{3n} 2n = \frac{n(3n+3)}{2} + 2n \times (3n-(2n+1)+1) = \frac{n(3n+3)+4n \times n}{2} = \boxed{\frac{n(7n+3)}{2}}$$

   où on a utilisé la formule de la question 1.(a), ainsi que la formule de la question 1.(b) avec $p = 2n+1$.

2. On a :

$$\begin{aligned}
T_n = \sum_{k=n}^{3n} \max(k,2n) &= \sum_{k=n}^{2n} \max(k,2n) + \sum_{k=2n+1}^{3n} \max(k,2n) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} 2n + \sum_{k=2n+1}^{3n} k \\
&= 2n \times (2n-n+1) + \left(\sum_{k=1}^{3n} k - \sum_{k=1}^{2n} k \right) \\
&= 2n(n+1) + \frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{2n(2n+1)}{2} \\
&= \frac{n \times (4(n+1) + 3(3n+1) - 2(2n+1))}{2} \\
&= \boxed{\frac{n(9n+5)}{2}.}
\end{aligned}$$

3. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$:
   - Si $a \leq b$ alors $\min(a,b) = a$ et $\max(a,b) = b$ donc $\min(a,b) + \max(a,b) = a + b$.
   - Si $a > b$ alors $\min(a,b) = b$ et $\max(a,b) = a$ donc $\min(a,b) + \max(a,b) = b + a = a + b$.

   Dans tous les cas, on a bien $\boxed{\min(a,b) + \max(a,b) = a + b.}$

   (b) On a donc :

$$\begin{aligned}
S_n + T_n = \sum_{k=n}^{3n} \min(k,2n) + \sum_{k=n}^{3n} \max(k,2n) &= \sum_{k=n}^{3n} \min(k,2n) + \max(k,2n) \\
&= \sum_{k=n}^{3n} k + 2n \\
&= \sum_{k=n}^{3n} k + \sum_{k=n}^{3n} 2n \\
&= \left(\sum_{k=1}^{3n} k - \sum_{k=1}^{n-1} k \right) + \sum_{k=n}^{3n} 2n \\
&= \frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} + 2n \times (3n - n + 1) \\
&= \frac{n \times (3(3n+1) - (n-1) + 4(2n+1))}{2} \\
&= \frac{n(16n+8)}{2} \\
&= \boxed{n(8n+4).}
\end{aligned}$$

   (c) En utilisant la valeur de S_n trouvée à la question 1, on retrouve alors que :

$$T_n = (S_n + T_n) - S_n = n(8n+4) - \frac{n(7n+3)}{2} = \frac{n \times (16n + 8 - (7n+3))}{2} = \boxed{\frac{n(9n+5)}{2}.}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i\times(n-i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}i^2 + (n+\frac{1}{2})i\\
&= -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+\frac{1}{2})\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(-(2n+1)+3(2n+1)}{12}\\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}
\end{aligned}$$

En utilisant que $\min(i,j)+\max(i,j) = i+j$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(n\times i + \frac{n(n+1)}{2}\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + n\times\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j) = n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(6n-(2n+1))}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.}$$

5. Écrivons que $\min(i,j,k) = \min(\min(i,j),k)$ et notons $i\wedge j = \min(i,j)$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\min(i,j,k) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i\wedge j}\min(i\wedge j,k) + \sum_{k=i\wedge j+1}^{n}\min(i\wedge j,k)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i\wedge j} k + \sum_{k=i\wedge j+1}^{n} i\wedge j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(i\wedge j)(i\wedge j+1)}{2} + (i\wedge j)\times(n-i\wedge j)\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i\wedge j)^2\right) + (n+\frac{1}{2})\times\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\wedge j\right)
\end{aligned}$$

On sait d'après la question 4 que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\wedge j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour l'autre somme, comme $(i\wedge j)^2 = \min(i,j)^2$ vaut i^2 si $i\leq j$ et vaut j^2 si $i>j$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i\wedge j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} i^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)(2i+1)}{6} + i^2\times(n-i)\\
&= -\frac{2}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^3\right) + (n+\frac{1}{2})\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\\
&= -\frac{2}{3}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+\frac{1}{2})\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)\times(-2n(n+1)+(2n+1)^2+1)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

Et finalement :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\min(i,j,k) &= -\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6} + (n+\frac{1}{2})\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)\times(-n^2-n-1+(2n+1)^2)}{12}\\
&= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}.}
\end{aligned}
$$