# Quelques sommes et produits supplémentaires

**Exercice 1**
Calculer :

1. $\sum_{j=0}^{n-2} 3^j$
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{2k+1}$
4. $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (x-1)^k$
5. $\sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+2}{k-1}$
6. $\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k}$
7. $\prod_{k=2}^{n-1} 3^{-k}$

**Exercice 2**
Pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a démontré en cours via un “découpage” la formule suivante :

$$(*) \ : \ \forall n \geq p, \ \sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$$

Redémontrer cette formule de deux autres manières :

1. en effectuant un changement d’indice judicieux pour utiliser la formule pour $\sum_{k=0}^{m} q^k$.
2. par récurrence.

**Exercice 3**
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose : $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k})$.

1. Simplifier $(1-x)P_1$ puis $(1-x)P_2$ puis $(1-x)P_3$.
2. Émettre une conjecture sur la valeur de $(1-x)P_n$ puis la démontrer. En déduire la valeur de $P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

# Plein de dérivées

**Exercice 4**
Dérivez :

1. $f_1 : x \longmapsto 5e^x - x^2$
2. $f_2 : x \longmapsto \frac{e^x + x}{2}$
3. $f_3 : x \longmapsto \frac{1-x^2}{3x - 2x^2}$
4. $f_4 : x \longmapsto \cos(2x+1) - e^{-x-2}$
5. $f_5 : x \longmapsto e^{-2x} \times \cos(x)$
6. $f_6 : x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$
7. $f_7 : x \longmapsto \frac{x\ln(x)}{1+x}$
8. $f_8 : x \longmapsto \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
9. $f_9 : x \longmapsto \frac{1}{x^3}$

**Exercice 5**
Si $u$ est une fonction ad hoc, exprimer la dérivée des fonctions suivantes. Appliquer ensuite cette formule pour calculer la dérivée de $f_i$.

1. $(u^6)' = \dots\dots\dots$ Ainsi, la dérivé de $f_1 : x \longmapsto (\ln(x))^6$ est $f_1' : x \longmapsto \dots\dots\dots$
2. $(e^u)'$, $f_2 : x \longmapsto e^{1/x}$
3. $(\ln(u))'$, $f_3 : x \longmapsto \ln(\sqrt{x})$
4. $\left(\frac{1}{u}\right)'$, $f_4 : x \longmapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

**Exercice 6**
Dérivez :

1. $f_1 : x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)}$
2. $f_2 : x \longmapsto \sin(x^3)$
3. $f_3 : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$
4. $f_4 : x \longmapsto \ln(1 + e^{-x})$
5. $f_5 : x \longmapsto \cos^{12}(2x)$
6. $f_6 : x \longmapsto \sqrt{1 - \sqrt{x}}$
7. $f_7 : x \longmapsto \ln(\ln(x))$
8. $f_8 : x \longmapsto (\tan(x) - 1)^2$
9. $f_9 : x \longmapsto \arctan(2x)$
10. $f_{10} : x \longmapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$

**Exercice 7**
Soient $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule pour $(f_1 f_2)'$.
2. Établir une formule pour $(f_1 f_2 f_3)'$.
3. Établir une formule pour $\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)'$.
4. En appliquant cette formule, retrouver la dérivée de $x \longmapsto x^n$.

**Exercice 8**
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver :

1. $f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x} e^{1/x}$
2. $f_2 : x \longmapsto \ln(1 - e^{-2x})$
3. $f_3 : x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
4. $f_4 : x \longmapsto \cos(3x)\cos^3(x)$
5. $f_5 : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
6. $f_6 : x \longmapsto x^\pi + \pi^x$

**Exercice 9**
Les calculs de dérivées ci-dessous sont justes, mais les notations employées sont incorrectes. Les corriger.

1. si $f(x) = e^x + 2x$ alors $f'(x) = (e^x)' + (2x)' = e^x + 2$
2. si $f(x) = xe^x$ alors, notant $u = x$ et $v = e^x$, on a $f'(x) = u'v + uv' = e^x + xe^x$
3. si $f(x) = e^{\cos(x)}$ alors $f(x) = e^u$ avec $u(x) = \cos(x)$ donc $f'(x) = u'e^u = -\sin(x)e^{\cos(x)}$
4. si $f(x) = \ln(1 + x^2)$ alors $f = \ln(u)$ avec $u(x) = 1 + x^2$ donc
$f'(x) = \ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1 + x^2}$