Remédiation 6

ex 2 :

1) Via $j=k-p$ (càd $k=j+p$ donc $q^k=q^{j+p}$) on a, puisque $p\leq k\leq n \iff 0\leq j\leq n-p$:

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{j=0}^{n-p} q^{j+p} = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{q^p-q^{n+1}}{1-q}$$

2) $\underline{I}$: pour $n=p$, d'une part $\sum_{k=p}^{p} q^k = q^p$, d'autre part,

$$\frac{q^p-q^{p+1}}{1-q} = \frac{q^p(1-q)}{1-q} = q^p$$ donc la formule est vraie au rang p.

$\underline{H}$: Supposons que $\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p-q^{n+1}}{1-q}$ pour un certain $n\geq p$.

Alors, $$\sum_{k=p}^{n+1} q^k = \sum_{k=p}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{q^p-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{q^p-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^p-q^{n+2}}{1-q}$$ ce qui

établit la formule au rang $n+1$.

Par récurrence on a donc bien montré que : $\forall n\geq p, \sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p-q^{n+1}}{1-q}$

exo 3 :

1) $$(1-x)P_1 = (1-x)\prod_{k=0}^{1}(1+x^{2^k}) = (1-x)(1+x^{2^0})(1+x^{2^1})$$

$$= (1-x)(1+x)(1+x^2) = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x^4)$$

$$(1-x)P_2 = (1-x)\prod_{k=0}^{2}(1+x^{2^k}) = (1-x)\prod_{k=0}^{1}(1+x^{2^k})(1+x^{2^2})$$

$$= (1-x)P_1(1+x^4) = (1-x^4)(1+x^4) = 1-x^8$$

De même, $(1-x)P_3 = (1-x)P_2(1+x^{2^3}) = (1-x^8)(1+x^8) = 1-x^{16}$

2) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-x)P_n = 1-x^{2^{n+1}}$ par récurrence :

$\underline{\text{I}}$: Pour $n=0$, $(1-x)P_0 = (1-x)\prod_{k=0}^{0}(1+x^{2^k}) = (1-x)(1+x^{2^0})$

$= (1-x)(1+x) = 1-x^2 = 1-x^{2^{0+1}}$

donc la formule est vraie au rang 0.

$\underline{\text{H}}$: Supposons que $(1-x)P_n = 1-x^{2^{n+1}}$ pour un certain $n \geq 0$.

Alors $(1-x)P_{n+1} = (1-x)P_n \times (1+x^{2^{n+1}})$

$= (1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})$

$= 1-x^{2\times 2^{n+1}} = 1-x^{2^{n+2}}$ cqfd.

3) Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ \prod_{k=0}^{n}(1+1^{2^k}) = \prod_{k=0}^{n} 2 = 2^{n+1} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$\underline{\text{exo 7}}$:

1) $(f_1f_2)' = f_1'f_2 + f_1f_2'$

2) $(f_1f_2f_3)' = (f_1f_2)'f_3 + (f_1f_2)\times f_3'$

$= f_1'f_2f_3 + f_1f_2'f_3 + f_1f_2f_3'$

3) On montrerait par récurrence que :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} f_i\right)\times f_k'$$

4) En prenant $f_k = f : x \longmapsto x$ on obtient, puisque $f' = 1$

$(f^n)' = \sum_{k=1}^{n} f^{n-1}\times f' = \sum_{k=1}^{n} f^{n-1} = n f^{n-1}$ càd que la dérivée de $f^n : x \longmapsto x^n$ est $x \longmapsto nx^{n-1}$.