Exercice 11
Étudier les fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
   Pour la limite de f en $+\infty$, on écrira $f(x) = \dfrac{1-e^{ax}}{1+e^{ax}}$ pour un nombre a à déterminer.
2. $g : x \longmapsto \sqrt{-x^4 + x^2 + 6}$

Exercice 12
Dans cet exercice, on démande de démontrer les résultats en revenant à la définition de la partie entière (qu'il faut donc connaître !).

1. Déterminer la partie entière de $\sqrt{33}$.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Exercice 13

1. Dans cette question, on cherche à montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.
   (a) Vérifier que cette formule est vraie pour $x = 3,2$ puis pour $x = 3,8$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrit : $x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $t \in [0, 1[$. Exprimer $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$. On distinguera deux cas en fonction de la valeur de t.
   (c) Dans chacun des cas précédents, exprimer $\lfloor 2x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
   (d) Conclure.
2. En suivant une méthode similaire à celle de la première question, montrer que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor$
3. De manière plus générale, on souhaite montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{n} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{n} \rfloor + \cdots + \lfloor x + \frac{n-1}{n} \rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor.$$

   On introduit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lfloor nx \rfloor - \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor$.
   (a) Que cherche-t-on à prouver sur la fonction f ?
   (b) Montrer que f est $\frac{1}{n}$-périodique.
   (c) Conclure en travaillant sur $[0, \frac{1}{n}]$.