Rappels sur les opérations sur les limites :

Nota bene : souvent, on préfèrera écrire $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ plutôt que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Cela permet en particulier de mener des calculs avant de conclure à la limite. Par exemple, l'écriture suivante est correcte :

$$\frac{1+e^x}{e^x} = e^{-x} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

mais l'écriture ci-dessous ne l'est pas (car on ne sait pas encore si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{e^x}$ existe avant de mener le calcul) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 1 = 1$$

Enfin, on ne confondera pas les expressions “tend vers” et “égal”. Dire par exemple que “la limite de e^x quand x tend vers $+\infty$ *tend* vers $+\infty$” est incorrect.

1 Limites des fonctions usuelles

On rappelle les limites suivantes, issues du cours :

- pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n =$
- pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} =$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) =$
- pour $q \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) =$
- $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) =$

Par ailleurs, si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si f est continue en x_0 (en particulier si f est continue sur son ensemble de définition), alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Par exemple, $\lim\limits_{x\to0} e^x =$, $\lim\limits_{x\to1} \frac{x+1}{2-x} =$

2 Opérations algébriques

Lorsqu'on connaît les limites de deux quantités $f(x)$ et $g(x)$, on peut *souvent* en déduire la limite de $f(x)+g(x)$, $f(x)\times g(x)$ et $\frac{f(x)}{g(x)}$. Attention, dans certains cas on ne peut pas conclure en l'état : on dit qu'on a une forme indéterminée (F.I.), il peut alors y avoir ou non de limite, finie ou non. Par exemple, si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, alors on ne peut pas conclure quant à la limite de $f(x)+g(x)$ en $+\infty$, c'est la forme indéterminée “$\infty - \infty$”.

On considère des fonctions f et g définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

• **<u>Somme :</u>** Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x)$ est donné par

	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell' = -\infty$	$\ell' = +\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	
$\ell = -\infty$			F.I.
$\ell = +\infty$			

• **<u>Produit :</u>** Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \times g(x)$ est donné par

	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$\ell' > 0$	$\ell' = -\infty$	$\ell' = +\infty$
$\ell < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$					
$\ell > 0$					
$\ell = -\infty$					
$\ell = +\infty$					

• **<u>Inverse :</u>** Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$ est donné par

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\ell = -\infty$	$\ell = +\infty$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell = 0$ (mais ni 0^+, ni 0^-)
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{\ell}$					

Remarque : Pour déterminer la limite d'un quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$, utiliser le tableau "ìnverse" puis le tableau "produit".
En conclusion, il y a quatre types de formes indéterminées :

Attention : Pour déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ et si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \neq 0$, alors il faut s'intéresser au signe de $g(x)$ lorsque $x \longrightarrow x_0$ pour savoir si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+$ ou $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^-$.

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{x-1}$
- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{3-x}$
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x^2-4}$

3 Composition de limites

Proposition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, soit x_0 un point de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$), et soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ et $g(y) \xrightarrow[y\to \ell]{} \ell'$ alors

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln|x|$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{1+\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{1/x}$

Exercice 1
Déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - x}{\ln(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-2x^2}{1-x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + x}{\ln(x)}$

Exercice 2
Déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^4}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{xe^x}{\ln x}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{1}{|x-1|}}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x - e^{1/x}}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \sqrt{2 + \dfrac{1}{x}}\right) \times e^{\sqrt{x}}$