TD 6 . Exercice 11

1) f est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} \neq 0\}$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$, on a en fait f définie sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x)$$

donc f est impaire et il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0 \quad \text{car } (e^x + e^{-x})^2 > 0 \text{ et } 4 > 0$$

On a donc le tableau de variations suivant :

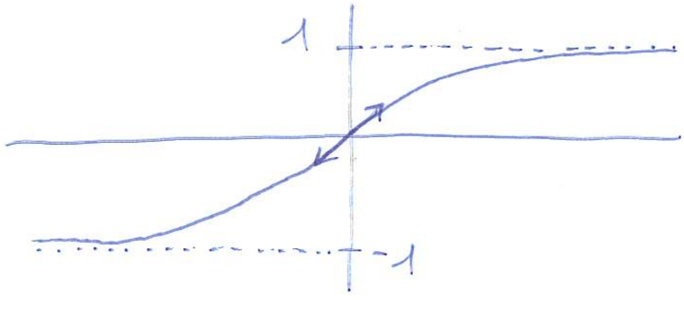
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	$+\infty$

On calcule que $f(0) = \frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0} = 0$ et

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

avec $e^{-2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Comme $f'(0) = \frac{4}{(e^0 + e^{-0})^2} = 1$ on a une pente de 1 en 0, et on complète le graphe sur $\mathbb{R}$ par symétrie par rapport à l'origine car f est impaire



2) g est définie sur $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} : -x^4 + x^2 + 6 \geq 0\}$.

Résolvons, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$-x^4 + x^2 + 6 \geq 0 \iff \begin{cases} y = x^2 \\ -y^2 + y + 6 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Comme on a : $-X^2 + X + 6 = -(X-3)(X+2)$, les racines de ce polynôme sont 3 et -2, et comme son coefficient dominant est négatif on a $(*) \iff \begin{cases} y = x^2 \\ -2 \leq y \leq 3 \end{cases} \iff -2 \leq x^2 \leq 3 \iff x^2 \leq 3 \iff -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Ainsi $\mathcal{D}_g = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $g(-x) = \sqrt{-(-x)^4 + (-x)^2 + 6} = \sqrt{-x^4 + x^2 + 6} = g(x)$ ainsi g est paire et il suffit de l'étudier sur $\mathcal{D}_g \cap \mathbb{R}^+ = [0, \sqrt{3}]$.

La fonction g est dérivable sur $\mathcal{D}'_g = \{x \in \mathbb{R} : -x^4 + x^2 + 6 > 0\}$. Les mêmes calculs que précédemment montrent que $\mathcal{D}'_g =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Ainsi g est dérivable sur $[0, \sqrt{3}[$ et $\forall x \in [0, \sqrt{3}[$,

$$g'(x) = \frac{-4x^3 + 2x}{2\sqrt{-x^4 + x^2 + 6}} = \frac{x}{\sqrt{-x^4 + x^2 + 6}}(-2x^2 + 1)$$

Pour $x \in [0, \sqrt{3}[$ on a donc $g'(x) \geq 0 \iff -2x^2 + 1 \geq 0$
(où ces équivalences sont correctes car on travaille avec $x \geq 0$). $\iff x^2 \leq \frac{1}{2} \iff x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{3}$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\|$
g	$\sqrt{6}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0

On calcule que $g(0) = \sqrt{-0^4 + 0^2 + 6} = \sqrt{6}$,

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6} = \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6} = \frac{5}{2}$

et $g(\sqrt{3}) = \sqrt{-(\sqrt{3})^4 + \sqrt{3}^2 + 6} = \sqrt{-9 + 3 + 6} = 0$

De plus, $g'(0) = 0$ (tangente horizontale en 0) et g n'est pas dérivable en $\sqrt{3}$ (tangente verticale en $\sqrt{3}$). On obtient donc le graphe ci-contre, complété sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (g paire)