Exercice 1

On définit les ensembles suivants :

$$A = \{(\sqrt{t}, -\ln(t)),\ t \in \mathbb{R}_*^+\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } x^2e^y = 1\}$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 2

On définit les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$E = \{(\frac{s}{2} - 2, 2s+1),\ s \in \mathbb{R}\} \text{ et } F = \{(t, 4t+9),\ t \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $E = F$.

Exercice 3

Soient A, B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$.
2. Montrer que si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.
3. Montrer que : $A \cap B = A \cup B \iff A = B$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on note

$$I(a) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ f(x) \leq a\} \quad \text{et} \quad S(a) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ f(x) \geq a\}.$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.
   (a) Montrer $I(a) \subset I(b)$.
   (b) Quelle relation similaire y a-t-il entre $S(a)$ et $S(b)$? Le démontrer.
2. (a) Pour $a \in \mathbb{R}$, écrire sous la forme d'un ensemble défini par équation l'ensemble $\overline{I(a)}$.
   (b) Écrire à l'aide des ensembles $I(a), I(b), S(a)$ et $S(b)$ les ensembles

$$E(a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a < f(x) \leq b\} \quad \text{et} \quad F(a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ : a \leq f(x) < b\}.$$

Exercice 5

Écrire en extension les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{Z}\ :\ -\frac{3}{2} < x < \sqrt{17}\}$
2. $E_2 = \{(-1)^n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$
3. $E_3 = [\![0,2]\!] \times [\![-1,2]\!]$
4. $E_4 = [\![0,2]\!] \times \{-1,2\}$
5. $E_5 = \{(x,y) \in [\![-3,3]\!]^2\ :\ x < y\}$
6. $E_6 = ([\![1,3]\!] \cup \{5\}) \cap ([\![2,6]\!] \cup \{1\})$
7. $E_7 = [\![1,8]\!] \backslash [\![3,5]\!]$

Exercice 6
On considère les segments $I = [-1, 1]$ et $J = [-2, 2]$.

1. Représenter dans le plan les ensembles $I \times J$ et $J \times I$.
2. Montrer que $I \times J \not\subset J \times I$.
3. Représenter graphiquement $(I \times J) \cap (J \times I)$ et $(I \times J) \cup (J \times I)$.
4. Démontrer que $(I \times J) \cap (J \times I) = K$ où $K = [-1, 1]^2$.

Exercice 7
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Donner en extension les ensembles suivants :

1. $\mathcal{P}(\{x\})$
2. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$
3. $\{A \in \mathcal{P}(\{0, 1, x\}) \mid A \not\subset \{0, x\}\}$
4. $\{A \in \mathcal{P}(\{0, 1, x\}) \mid \{0, x\} \not\subset A\}$

Exercice 8
Soit E un ensemble. Pour A, B deux parties de E on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

1. Représenter $A \Delta B$ sur un dessin.
2. Pour une partie $A \in \mathcal{P}(E)$ quelconque, que vaut $A \Delta E$? $A \Delta A$?
3. Montrer que pour toutes parties A, B de E on a $A \Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
   On reviendra à la définition de $I\backslash J$.