TD 6

exo 13

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on écrit $x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $t \in [0,1[$ puis on distingue 3 cas

- si $0 \leq t < \frac{1}{3}$: alors $3x = 3\lfloor x \rfloor + 3t$ avec $3\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $3t \in [0,1[$ donc $\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor$.
  Par ailleurs, $x + \frac{1}{3} = \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{3}$ avec $\frac{1}{3} \leq t + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ donc $t + \frac{1}{3} \in [0,1[$
  donc $\lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor$; et $x + \frac{2}{3} = \lfloor x \rfloor + t + \frac{2}{3}$ avec $\frac{2}{3} \leq t + \frac{2}{3} < 1$ donc
  $t + \frac{2}{3} \in [0,1[$ et donc $\lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
  Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor$.

- si $\frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}$: alors $3x = 3\lfloor x \rfloor + 3t$ avec $1 \leq 3t < 2$ donc on écrit plutôt
  $3x = 3\lfloor x \rfloor + 1 + (3t - 1)$ avec $3\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq 3t - 1 < 1$, et ainsi $\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor + 1$
  Par ailleurs $x + \frac{1}{3} = \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{3}$ avec $\frac{2}{3} \leq t + \frac{1}{3} < 1$ donc $\lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
  Et $x + \frac{2}{3} = \lfloor x \rfloor + t + \frac{2}{3} = \lfloor x \rfloor + 1 + (t - \frac{1}{3})$ avec $0 \leq t - \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$ donc
  $\lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
  Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 = 3\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor 3x \rfloor$.

- si $\frac{2}{3} \leq t < 1$: alors $3x = 3\lfloor x \rfloor + 2 + (3t - 2)$ avec $3\lfloor x \rfloor + 2 \in \mathbb{Z}$ et
  $0 \leq 3t - 2 < 1$ donc $\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor + 2$.
  Par ailleurs, $x + \frac{1}{3} = \lfloor x \rfloor + 1 + (t - \frac{2}{3})$ avec $0 \leq t - \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ donc $\lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$
  et $x + \frac{2}{3} = \lfloor x \rfloor + 1 + (t - \frac{1}{3})$ avec $\frac{1}{3} \leq t - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ donc $\lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
  Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor x \rfloor + 1 = 3\lfloor x \rfloor + 2 = \lfloor 3x \rfloor$.

Dans tous les cas, on a bien montré que : $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor$.

3) Il serait possible de procéder comme précédemment en écrivant
$x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $t \in [0,1[$ puis en distinguant n cas selon la
valeur de $k \in [\![0, n-1]\!]$ telle que $\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}$.
L'exercice propose plutôt de ne traiter que le cas $0 \leq t < \frac{1}{n}$
et d'utiliser un argument de périodicité :

a) On cherche à montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \left\lfloor n\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\rfloor - \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\right\rfloor \\
&= \lfloor nx+1 \rfloor - \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{k+1}{n}\right\rfloor \\
&= \lfloor nx \rfloor + 1 - \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor \\
&= \lfloor nx \rfloor + 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\
&= \lfloor nx \rfloor + 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\
&= \lfloor nx \rfloor - \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est $\frac{1}{n}$-périodique.

c) Comme f est $\frac{1}{n}$-périodique, pour montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$,
il suffit de montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[,\ f(x) = 0$.

Soit donc $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$, on a : $nx \in [0, 1[$ donc $\lfloor nx \rfloor = 0$.

De plus, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $x + \frac{k}{n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$

Or $k \leq n-1$ donc $k+1 \leq n$ donc $\frac{k+1}{n} \leq 1$; et $k \geq 0$. donc $\frac{k}{n} \geq 0$;

ainsi $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\subset [0, 1[$ et donc $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0$.

Finalement, $f(x) = 0$ ce qu'il fallait démontrer.