Mathématiques - mercredi 13 décembre 2023
Devoir nº4 Durée : 2 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet est constitué de 3 exercices indépendants et d'une annexe.**
- **On rendra l'annexe (avec son nom) même si elle n'est pas complétée.**

Exercice 1.

1. Dériver les fonctions f et g suivantes (on ne s'intéressera pas aux ensembles de dérivabilité) :
$$f : x \longmapsto \frac{x\ln(x)}{2} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \tan^2(3x).$$
2. Calculer les sommes S_n et T_n suivantes pour $n \geq 2$:
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-2k}.$$
3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sin(x) \leq x$.
4. Soient les ensembles suivants :
$$E = \{(3 - \frac{3}{2}t, t),\ t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x + 3y = 6\}.$$
Démontrer que $E = F$.

Exercice 2. Dans cet exercice, on considère la fonction f définie par l'expression :
$$f(x) = \ln(-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5)$$

1. Faire l'étude complète de f. On tracera l'allure de son graphe sur l'annexe.
On donne les approximations : $\ln(2) \simeq 0,7$ *;* $\ln(3) \simeq 1,1$ *;* $\ln(4) \simeq 1,4$ *;* $\ln(5) \simeq 1,6$ *;* $\ln(6) \simeq 1,8$ *;* $\ln(7) \simeq 1,9$ *;* $\ln(8) \simeq 2,1$ *;* $\ln(9) \simeq 2,2$ *et* $\ln(10) \simeq 2,3$.
2. *Pour les questions ci-dessous, on importera les bibliothèques nécessaires une seule fois pour la totalité de l'exercice.*
   (a) Écrire une fonction Python prenant en argument un nombre réel x et renvoyant $f(x)$.
   (b) Écrire un code Python permettant de tracer le graphe de f sur $[-1,5\ ;\ 3]$ avec 100 points de tracé.
   (c) Écrire une fonction `seuil` prenant en argument $M \in \mathbb{R}$ et renvoyant le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) < M$.
   (d) Pour quelles valeurs de $M \in \mathbb{R}$, l'appel de `seuil(`M`)` ne conduit pas à une boucle infinie ? Justifier.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la quantité

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k.$$

Le but de cet exercice est de trouver une formule exprimant $S(x)$ en fonction de x et n.

1. Calculer $S(1)$.
2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x^k$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x\, f'(x) = S(x)$.
   (b) Déterminer une autre expression de $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
   (c) En déduire une expression de $f'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
   (d) Conclure en donnant une formule exprimant $S(x)$ en fonction de x et de n lorsque $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
3. En réutilisant la fonction f et en appliquant une technique similaire, déterminer une formule exprimant la valeur de $T(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$ en fonction de x et de n.

Annexe

NOM et PRÉNOM :