<u>DS 4 - Corrigé</u>

<u>Exercice 1 :</u>

1) $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = \boxed{\frac{\ln(x)+1}{2}}$

$g(x) = u(x)^2$ avec $u(x) = \tan(3x)$ donc $u'(x) = 3 \times \frac{1}{\cos^2(3x)}$

Donc $g'(x) = 2u'(x)u(x) = \boxed{\frac{6\tan(3x)}{\cos^2(3x)}} = 6\tan(3x)(1+\tan^2(3x))$

2) $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n) = \boxed{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-2k} - \binom{n}{0} 2^{n-2\times 0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 2^{-k} - 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2^n$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2}\right)^n - 2^n = \boxed{\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2^n}$$

3) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$: x \mapsto x - \sin(x)$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ car $\cos(x) \leq 1$

donc on a le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 $\nearrow$	

avec $f(0) = 0 - \sin(0) = 0$

On voit donc que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$

c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \geq \sin(x)$.

4) On procède par double inclusion.

- on a $E \subset F$: En effet, soit $(x,y) \in E$ alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (3-\frac{3}{2}t, t)$ c'est-à-dire que $x = 3-\frac{3}{2}t$ et $y = t$. Dès lors, $2x+3y = 2(3-\frac{3}{2}t) + 3t = 6-3t+3t = 6$ donc $(x,y) \in F$.
- on a $F \subset E$: En effet, soit $(x,y) \in F$ alors on a $2x+3y=6$. Posons alors $t=y$, on a donc $2x+3t=6$ donc $2x = 6-3t$ donc $x = 3-\frac{3}{2}t$. Ainsi $(x,y) = (3-\frac{3}{2}t, t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ donc $(x,y) \in E$.

Finalement, on a bien montré que $E = F$.

Exercice 2 :

1) La fonction f est définie et dérivable sur

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : -e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 > 0\}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout donc :

$$-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 > 0 \iff -(e^{-x})^2 + 4e^{-x} + 5 > 0$$

$$\iff \begin{cases} y = e^{-x} \\ -y^2 + 4y + 5 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Le polynôme $-X^2 + 4X + 5$ a pour discriminant :
$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 36$ donc a pour racines :

$$\frac{-4+\sqrt{36}}{-2} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{-4-\sqrt{36}}{-2} = 5.$$

De plus, son coefficient dominant est négatif donc :

$$(*) \iff \begin{cases} y = e^{-x} \\ -1 < y < 5 \end{cases} \iff -1 < e^{-x} < 5 \quad (**)$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on a :

$$(**) \iff e^{-x} < 5 \overset{(***)}{\iff} -x < \ln(5) \iff x > -\ln(5)$$

(où l'équivalence $(***)$ découle du fait que $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$ et que $e^{-x}, 5 \in \mathbb{R}_*^+$).

Ainsi $\underline{\mathcal{D} =]-\ln(5), +\infty[}$.

Ecrivons, pour $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = -e^{-2x} + 4e^{-x} + 5$.

Alors on a : $\forall x \in \mathcal{D}$, $u'(x) = 2e^{-2x} - 4e^{-x}$ et donc

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2e^{-2x} - 4e^{-x}}{-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5} = \boxed{\frac{2e^{-x}}{-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5} \times (e^{-x} - 2)}$$

Par construction, on sait que : $\forall x \in \mathcal{D}$, $-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 > 0$.

De plus, $\forall x \in \mathcal{D}$, $2e^{-x} > 0$. Ainsi, pour $x \in \mathcal{D}$ on a :

$$f'(x) \geq 0 \iff e^{-x} - 2 \geq 0 \iff e^{-x} \geq 2$$

$$\underset{(*)}{\iff} -x \geq \ln(2) \iff x \leq -\ln(2)$$

(où, à nouveau, l'équivalence $(*)$ découle du fait que $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$ et que $e^{-x}, 2 \in \mathbb{R}_*^+$).

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\ln(5)$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(9)$	$\searrow$	$\ln(5)$

où on a ajouté les informations suivantes :

• $f(-\ln(2)) = \ln(-e^{2\ln(2)} + 4e^{\ln(2)} + 5)$
$= \ln(-e^{\ln(4)} + 4\times 2 + 5)$
$= \ln(-4 + 8 + 5)$
$= \boxed{\ln(9)}$

• Par construction, $-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 \xrightarrow[x \to -\ln(5)]{} 0^+$. Or $\ln(y) \xrightarrow[y \to 0^+]{} -\infty$
donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to -\ln(5)]{} -\infty}$

• $-2x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et $-x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$, or $e^{y} \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0$ donc
$-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 5$ et donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(5)}$

On en déduit alors le graphe de f en annexe en utilisant les valeurs approchées de $\ln(2)$, $\ln(5)$ et $\ln(9)$ données par l'énoncé

2)
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

a)
```
def f(x):
    a = - np.exp(-2*x) + 4* np.exp(-x) + 5
    return np.log(a)
```

b)
```
absi = np.linspace(-1.5, 3, 100)
ordo = f(absi)
plt.plot(absi, ordo)
plt.show()
```

c)
```
def seuil(M):
    n = 0
    while f(n) >= M :
        n = n+1
    return n
```

d) L'appel de seuil(M) ne conduit pas à une boucle infinie à condition qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) < M$.
D'après le graphe de f, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) > \ln(5)$ et $f(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(5)$.
Pour qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) < M$, il faut et il suffit donc que $M > \ln(5)$.
Ainsi, l'appel de seuil(M) ne conduit pas à une boucle infinie à condition que $\boxed{M > \ln(5)}$.

Exercice 3 :

1) On a $S(1) = \sum_{k=1}^{n} k \times 1^k = \sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$.

2) a) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a, en dérivant terme à terme,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

donc $$x f'(x) = x \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k \times x \times x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k x^{k} = S(x)$$

b) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - x^0$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{1-x^{n+1}-(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{x-x^{n+1}}{1-x} = \boxed{\frac{x^{n+1}-x}{x-1}}$$

c) D'après la formule de la dérivée d'un quotient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{((n+1)x^n - 1)(x-1) - (x^{n+1}-x) \times 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)x^{n+1} - x - (n+1)x^n + 1 - x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$$

$$= \boxed{\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}}$$

d) D'après la question a) on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad S(x) = xf'(x) = \boxed{\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}}$$

3) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1x^{1-1} + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1}$$

donc

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$$

et donc

$$x^2 f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^k \text{ car}$$

le terme en $k=1$ vaut 0. Donc

$$x^2 f''(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k - \sum_{k=1}^{n} k x^k = T(x) - S(x)$$

et ainsi $T(x) = S(x) + x^2 f''(x)$.

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ et $v(x) = (x-1)^2$

donc $u'(x) = n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$

et $v'(x) = 2(x-1)$.

Donc
$$f''(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{n(n+1)x^{n-1}(x-1)^3 - (nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1) \times 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{n(n+1)x^{n-1}(x-1)^2 - 2nx^{n+1} + 2(n+1)x^n - 2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{n(n-1)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3}$$

et finalement, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$T(x) = S(x) + x^2 f''(x)$$

$$= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} + \frac{n(n-1)x^{n+3} - 2(n^2-1)x^{n+2} + n(n+1)x^{n+1} - 2x^2}{(x-1)^3}$$

donc

$$T(x) = \frac{\left(nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x\right)(x-1) + n(n-1)x^{n+3} - 2(n^2-1)x^{n+2} + n(n+1)x^{n+1} - 2x^2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{n^2 x^{n+3} - \left(2(n^2-1) + 2n+1\right)x^{n+2} + (n+1)^2 x^{n+1} - x^2 - x}{(x-1)^3}$$

$$= \boxed{\frac{n^2 x^{n+3} - (2n^2+2n-1)\,x^{n+2} + (n+1)^2 x^{n+1} - x^2 - x}{(x-1)^3}}$$

et, par ailleurs,

$$T(1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

n.b : La formule moche pour $T(x)$ a été validée par "Wolfram Alpha", un site Internet réalisant toutes sortes de calculs et que vous pourrez utiliser pour vérifier vos résultats.

$\boxed{\text{Annexe}}$

NOM et PRÉNOM :