**Exercice 8**

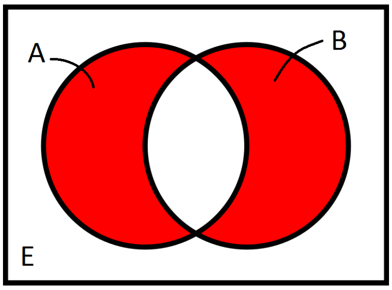
Soit $E$ un ensemble. Pour $A, B$ deux parties de $E$ on définit la différence symétrique de $A$ et $B$ par :

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

1. Représenter $A\Delta B$ sur un dessin.
2. Pour une partie $A \in \mathcal{P}(E)$ quelconque, que vaut $A\Delta E$ ? $A\Delta A$ ?
3. Montrer que pour toutes parties $A, B$ de $E$ on a $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
   *On reviendra à la définition de $I\backslash J$.*

**Solution :**

1. $A\Delta B$ est la partie en rouge sur le schéma ci-dessous :




2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$\begin{aligned} A\Delta E &= (A \cap \overline{E}) \cup (\overline{A} \cap E) = (A \cap \varnothing) \cup \overline{A} = \varnothing \cup \overline{A} = \overline{A} \\ A\Delta A &= (A \cap \overline{A}) \cup (\overline{A} \cap A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \end{aligned}$$

3. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
   Solution 1 : par calcul direct.
   Par définition de la différence on a $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.
   Puis d'après les lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Enfin en utilisant les règles de distributivité de l'union et l'intersection on obtient finalement :

$$\begin{aligned} (A \cup B)\backslash(A \cap B) &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= \big((A \cup B) \cap \overline{A}\big) \cup \big((A \cup B) \cap \overline{B}\big) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= \varnothing \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup \varnothing \\ &= A\Delta B \end{aligned}$$

   Solution 2 : par double inclusion.
   Montrons que $A\Delta B \subset (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ : Soit $x \in A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ alors $x \in A \cap \overline{B}$ ou $x \in \overline{A} \cap B$. Traitons les deux cas :
   - Si $x \in A \cap \overline{B}$ alors $x \in A$ donc $x \in A \cup B$ ; et $x \in \overline{B}$ donc $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$. Ainsi $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
   - Si $x \in \overline{A} \cap B$ alors $x \in \overline{A}$ donc $x \notin A$ donc $x \notin A \cap B$ ; et $x \in B$ donc $x \in A \cup B$. Ainsi $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

Dans tous les cas on a $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Finalement cela prouve bien que $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Montrons que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B$ : Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A$ ou $x \in B$. Traitons les deux cas en nous servant du fait qu'on a aussi $x \notin A \cap B$ :

- Si $x \in A$ alors, puisque $x \notin A \cap B$, on a $x \notin B$ i.e. $x \in \overline{B}$. Ainsi $x \in A \cap \overline{B}$ et donc $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
- Si $x \in B$ alors, puisque $x \notin A \cap B$, on a $x \notin A$ i.e. $x \in \overline{A}$ donc $x \in \overline{A} \cap B$ et donc $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Dans tous les cas on a $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \Delta B$.
Finalement cela prouve bien que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B$.

Par double inclusion on a finalement montré que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.