Premières techniques pour lever une forme indéterminée

Rappel : il y a quatre types de formes indéterminées :

La technique usuelle pour lever une indétermination consiste à mettre en facteur le terme "dominant" (c'est-à-dire celui qui est le plus grand). En faisant cela, on fait souvent apparaître une simplification qui permet de conclure quant à la limite demandée.

Exemple : déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{x^2-1}$ (F.I. de la forme). On écrit que :

$$\frac{2x+5}{x^2-1} = \frac{x\left(\qquad \right)}{x^2\left(\qquad \right)} =$$

Dès lors, comme :

-
-
-

on a finalement

Remarque : Attention, puisqu'il s'agit de lever une forme indéterminée, on réalise un calcul *sans savoir encore si la limite existe.* Ainsi **on ne commence pas la rédaction par :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ...$

Cette méthode peut également fonctionner dans certains cas pour lever une indétermination du type $\infty - \infty$.

Exemple : déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n - 3^n$ (F.I. de la forme $\infty - \infty$). On écrit que :

$$4^n - 3^n = 4^n \times \left(1 - \frac{3^n}{4^n}\right) = 4^n \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

Or $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1$.
Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n - 3^n = +\infty$.

Enfin, cette méthode peut aussi fonctionner pour lever une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$. Il faut toutefois faire attention à ne pas se tromper dans l'identification du terme dominant...

Exemple : déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (F.I. de la forme $\dfrac{0}{0}$). Lorsque $x \to 0$, on a :
On écrit donc :

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}} =$$

Exercice 1
Déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\ln(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^4}$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \sin(e^{-1/x})$
4. $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2-x}{1-x}$
5. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x+1}{1-e^{-x}}$
6. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ (on distinguera selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 2
Identifier la forme indéterminée puis la lever :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+n^2-1}{n^2+2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x-x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{n} - n\ln(n)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x - x^3e^{2x}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$

Exercice 3
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2+1}{x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 2e^x + 3$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^{-2x} - e^{-x})$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x}{2x^2+3}$
5. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^3-x^2}{x-\sqrt{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$
7. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{3^n-1}{3^n+2}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right)^x$