Remédiation 10

Exercice 1

1) $-x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et $e^y \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$ donc $e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
Et $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
donc $\dfrac{e^{-x}}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2) $\ln(1+x^2) \xrightarrow[x\to0]{} \ln(1)=0$ et $x^4 \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc F.I. $\frac{0}{0}$

3) $-\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$ et $e^y \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$ donc $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ donc $\sin(e^{-1/x}) \xrightarrow[x\to0^+]{} \overbrace{\sin(0)}^{=0}$

4) $2-x \xrightarrow[x\to1^+]{} 1$ et $1-x \xrightarrow[x\to1^+]{} 0^-$ car si $x>1$ alors $1-x<0$. Donc $\dfrac{2-x}{1-x} \xrightarrow[x\to1^+]{} -\infty$

5) $x+1 \xrightarrow[x\to0^-]{} 1$ et $1-e^{-x} \xrightarrow[x\to0^-]{} 1-e^{-0}=0$. De plus, si $x<0$ alors $-x>0$
donc $e^{-x}>1$ donc $1-e^{-x}<0$, ainsi $1-e^{-x} \xrightarrow[x\to0^-]{} 0^-$.
Finalement, $\dfrac{x+1}{1-e^{-x}} \xrightarrow[x\to0^-]{} -\infty$.

6) $\sqrt{x}^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})) = \exp(\frac{1}{2}\sqrt{x}\ln(x))$ Or $\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$ et $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$
donc F.I $0\times\infty$.

Exercice 2

1) $$\frac{n^3+n^2-1}{n^2+2} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = n \times \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

Or $1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $1+\dfrac{2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\dfrac{n^3+n^2-1}{n^2+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

2) $$\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{1}=1$$ car $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

3) $\dfrac{x^2-1}{x-x^2} = \dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \dfrac{1}{-1} = -1$

car $\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

4) $\sqrt{n} - n\ln(n) = n\ln(n)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} - 1\right)$

Or $\sqrt{n}\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Et $n\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc finalement, $\sqrt{n} - n\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

5) $x^2e^x - x^3e^{2x} = x^3e^{2x}\left(\dfrac{1}{xe^x} - 1\right)$

Or $xe^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{xe^x} - 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$

Et $x^3e^{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc finalement $x^2e^x - x^3e^{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

6) $\dfrac{2^n+3^n}{4^n+5^n} = \dfrac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n+1\right)} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \times \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}$

Comme $\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{5} \in]-1,1[$, on a $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et finalement $\dfrac{2^n+3^n}{4^n+5^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.