**BCPST 1B** **Interro Calcul 8 (sujet A) :** **/10 pts** **2023-2024**

NOM :

PRENOM :

**Question 1** ( /1 pt). Soient $A$, $B$ deux ensembles et soit $u : A \longrightarrow B$. Donner la définition de : $u$ est injective.

$$\forall x, x' \in A, \quad (u(x) = u(x') \Rightarrow x = x')$$

**Question 2** ( /9 pts). Déterminer les limites suivantes. Chaque réponse doit être justifiée succinctement.

1. ( /1 pt) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \sin(x)$
2. ( /1 pt) $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x}$
3. ( /1 pt) $\lim_{n\to +\infty} \frac{2n^2-3n}{n^3+n-1}$
4. ( /2 pts) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{3-x}$
5. ( /2 pts) $\lim_{x\to +\infty} \ln(1-e^{-1/x})$
6. ( /2 pts) $\lim_{n\to +\infty} \frac{2^n-1}{3^n-5^n}$

1) $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\frac{1}{x} - \sin(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

2) $e^x \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$ et $x \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$ donc $\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$

3) $$\frac{2n^2-3n}{n^3+n-1} = \frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}$$

Or $2-\frac{3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ et $1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{2-3/n}{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{2n^2-3n}{n^3+n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4) $x \xrightarrow[x\to 3]{} 3$ et $3-x \xrightarrow[x\to 3^-]{} 0^+$ car si $x<3$ alors $3-x>0$

donc $\frac{x}{3-x} \xrightarrow[x\to 3^-]{} +\infty$

5) $-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $1-e^{-1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1-e^0 = 0$

Or $\ln(y) \xrightarrow[y\to 0]{} -\infty$. Donc $\ln(1-e^{-1/x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

6) $$\frac{2^n-1}{3^n-5^n} = \frac{2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}-1\right)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}$$ Or $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5} \in ]-1,1[$

donc $\left(\frac{2}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\left(\frac{3}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par suite $\frac{2^n-1}{3^n-5^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

NOM :

PRENOM :

**Question 1** ( /1 pt). Soient $A$, $B$ deux ensembles et soit $u : A \longrightarrow B$. Donner la définition de : $u$ est surjective.

$\forall y \in B, \exists x \in A : y = u(x)$

**Question 2** ( /9 pts). Déterminer les limites suivantes. Chaque réponse doit être justifiée succinctement.

1. ( /1 pt) $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) - \dfrac{1}{x}$
2. ( /1 pts) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$
3. ( /1 pt) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 - n + 1}{3n^2 - 2n}$
4. ( /2 pts) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x}{4 - x}$
5. ( /2 pts) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1 - e^{-1/x})$
6. ( /2 pts) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n - 3^n}{5^n - 1}$

1) $\cos(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ donc $\cos(x) - \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

2) $\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$ donc $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

3) $\dfrac{n^3 - n + 1}{3n^2 - 2n} = \dfrac{n^3\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(3 - \frac{2}{n}\right)} = n \times \dfrac{1 - 1/n^2 + 1/n^3}{3 - 2/n}$

Or $1 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $3 - \dfrac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$ donc $\dfrac{1 - \frac{1}{n^2} + 1/n^3}{3 - 2/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{3}$

Et $n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Donc $\dfrac{n^3 - n + 1}{3n^2 - 2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

4) $x \xrightarrow[x \to 4^-]{} 4$ et $4 - x \xrightarrow[x \to 4^-]{} 0^+$ car si $x < 4$ alors $4 - x > 0$

donc $\dfrac{x}{4 - x} \xrightarrow[x \to 4^-]{} +\infty$

5) $-\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ et $e^y \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0$ donc $e^{-1/x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

et donc $\ln(1 - e^{-1/x}) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ln(1) = 0$

6) $\dfrac{2^n - 3^n}{5^n - 1} = \dfrac{3^n\left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right)}{5^n\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \times \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Or $\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{5} \in ]-1, 1[$

donc $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et par suite $\dfrac{2^n - 3^n}{5^n - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$