
Devoir maison nº2
À rendre le lundi 8 janvier 2024
Vous pouvez rendre une copie pour deux élèves.

Dans ce sujet, de nombreuses questions sont faisables même si vous n'avez pas réussi la question précédente. Entraînez-vous à utiliser le résultat d'une question pour en résoudre une autre.

Exercice 1 (Un peu d'arctangente)**.**
On définit les fonctions f et g par :

$$f(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x) \quad \text{ et } \quad g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

1. Justifier que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
3. Calculer les dérivées de f et g puis montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g'(x)$.
4. Déduire des questions précédentes que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$. On considèrera la fonction $f - g$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

5. En utilisant les questions précédentes, montrer que $S_n = \arctan(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2 (Adapté d'un sujet du concours G2E)**.**
Pour k un entier tel que $k \geq 2$ on considère la fonction f_k définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2,\ f_k(x,y) = x^k y - y^k x.$$

De plus, g_k et φ_k désignent les fonctions définies par :

$$g_k(x,y) = \frac{f_k(x,y)}{x-y}, \qquad \varphi_k(x) = g_k(x, 1-x).$$

1. On note $\mathcal{D}_1 \subset]0,1[^2$ et $\mathcal{D}_2 \subset]0,1[$ les ensembles de définition de g_k et de φ_k.
   (a) Explicitez $\mathcal{D}_1$ et le représenter à l'aide d'un schéma.
   (b) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathcal{D}_2,\ \varphi_k(x) = \frac{x^k(1-x) - (1-x)^k x}{2x-1}$$
   (c) Explicitez alors $\mathcal{D}_2$.

2. Dans cette question, on cherche la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$.
   (a) Démontrer que :
$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_1,\ g_k(x,y) = xy \sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i}.$$
   (b) En déduire que :
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k}.$$

Dans la suite de l'exercice, on note dorénavant $\varphi_k(\frac{1}{2}) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

3. Le but de cette question est de démontrer que pour tout $k \geq 2$, et pour tout $x \in]0,1[$, on a l'inégalité $(*)$ suivante :
$$(*) \quad : \quad x(1-x)^{k-1} \leq \varphi_k(x).$$
   (a) Démontrer $(*)$ pour $x = \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que pour $x > \frac{1}{2}$ on a :
$$(*) \iff (x-(1-x))x(1-x)^{k-1} \leq x^k(1-x) - x(1-x)^k.$$
   puis démontrer $(*)$ dans ce cas.
   (c) En utilisant une méthode similaire, démontrer $(*)$ dans le cas où $x < \frac{1}{2}$.
4. Pour $k \geq 2$ et $x \in]0,1[$, démontrer l'idéntité $(**)$ suivante :
$$(**) \quad : \quad \varphi_{k+1}(x) = x(1-x)^k + x\varphi_k(x).$$
5. (a) En utilisant $(*)$ et $(**)$ démontrer que : $\forall k \geq 2,\ \forall x \in]0,1[,\ \varphi_{k+1}(x) \leq \varphi_k(x)$.
   (b) Démontrer que : $\forall k \geq 2,\ \forall x \in]0,1[,\ \varphi_k(x) \geq 0$.
   (c) En citant un théorème de lycée, en déduire que pour tout $x \in]0,1[$, la suite $(\varphi_k(x))_{k\geq 2}$ converge.

En particulier, pour $x = \frac{1}{2}$, la question précédente montre que la suite $\left(\frac{k-1}{2^k}\right)_{k\geq 2}$ converge. On note $\ell = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{k-1}{2^k}$.

6. Le but de cette question est de démontrer que $\ell = 0$. *(On se refuse donc à utiliser le théorème de croissance comparée qui annonce ce résultat !)*
   (a) Montrer qu'on a aussi $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{2^k} = \ell$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{\ell}{2}$.
   (c) Conclure.

Exercice 3 (Exercice facultatif)**.**

1. Soient E, F, G trois ensembles et soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
   (a) On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.
   (b) On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.
2. (a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction injective. En utilisant la question 1, montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (f(x))^2$ est injective.
   (b) Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction surjective. En utilisant la question 1, montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = g(x^2)$ est surjective.