TD 10 : exo 11

1) Il s'agit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$, $f_a(x) \neq a$.

Or pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$, $\frac{1}{x-a} \neq 0$ donc $\frac{1}{x-a} + a \neq 0$.

Ainsi $\mathrm{Im}(f_a) \subset \mathbb{R}\setminus\{a\}$ (et donc on peut effectuer la composée $f_a \circ f_a$).

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$ on a :

$$(f_a \circ f_a)(x) = f_a(f_a(x)) = f_a\left(\frac{1}{x-a} + a\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{x-a}+a\right)-a} + a$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x-a}} + a = x - a + a = x$$

Ainsi $f_a \circ f_a = id_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}$. D'après le cours, on en déduit que f_a est bijective et que sa bijection réciproque est elle même : $f_a^{-1} = f_a$.

Graphiquement, le graphe de f_a^{-1} est le symétrique de celui de f_a par rapport à la droite d'équa° $y = x$. Comme $f_a^{-1} = f_a$, c'est donc que le graphe de f_a est symétrique par rapport à cette droite.

En effet, on obtient le graphe de f_a par translation de a vers la droite et de a vers le haut du graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$. Le résultat a bien la droite $y = x$ comme axe de symétrie.