DM 2 - Corrigé : Exercice 1

1) La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour la fonction g, il faut remarquer que le polynôme X^2+X+1 n'a pas de racine réelle car son discriminant est $1^2-4\times1\times1=-3<0$. Comme son coefficient dominant est positif on a donc : $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+1>0$. A fortiori, $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+1\neq 0$. Ainsi g est définie sur $\mathbb{R}$.

2) On a $f(0)=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$
et $g(0)=\arctan\left(\frac{1}{0^2+0+1}\right)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$

3) Pour $x\in\mathbb{R}$ on a $f'(x)=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}$ et si on note $g(x)=\arctan(u(x))$ avec $u(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$ alors on a :

$$g'(x)=\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2}=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2+1}$$

$$=-\frac{2x+1}{x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2+1}=-\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$$

Et par ailleurs,

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2-(1+(x+1)^2)}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)}$$

$$=\frac{x^2-(x+1)^2}{1+(x+1)^2+x^2+x^2(x+1)^2}=\frac{-2x-1}{1+x^2+2x+1+x^2+x^2(x^2+2x+1)}$$

$$=-\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$$

On a donc bien $f'(x)=g'(x)$.

4) Notons $h=f-g$. D'après la question 3) on a $h'=f'-g'=0$. Or h est définie sur un intervalle ($\mathbb{R}$) donc cela implique que h est constante sur $\mathbb{R}$. Or, d'après la question 2), $h(0)=f(0)-g(0)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$.
Ainsi : $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=0$ c'est-à-dire : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} g(k) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k)$.

On reconnaît alors une somme télescopique et donc :

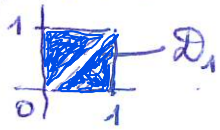
$$S_n = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1).$$

6) On a $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$. Donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1) a) On a $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in]0,1[^2 : x-y \neq 0\} = \{(x,y) \in]0,1[^2 : x \neq y\}$

Il s'agit donc d'un carré privé de sa diagonale :



b) Pour $x \in \mathcal{D}_2$ on a :

$$\varphi_k(x) = g_k(x, 1-x) = \frac{f_k(x,1-x)}{x-(1-x)} = \frac{x^k(1-x) - (1-x)^k x}{2x-1}$$

c) On a donc $\mathcal{D}_2 = \{x \in]0,1[: 2x-1 \neq 0\} =]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[$.

2) a) Pour $(x,y) \in \mathcal{D}_1$ on a :

$$(x-y) \times xy \sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i} = x^2 y \sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i} - xy^2 \sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-2} x^{i+2} y^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-2} x^{i+1} y^{k-i}$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} x^{j+1} y^{k-j} - \sum_{i=0}^{k-2} x^{i+1} y^{k-i}$$

(via le changement d'indice $j = i+1$ d'où $i+2 = j+1$ et $k-1-i = k-j$, et $0 \leq i \leq k-2 \iff 1 \leq j \leq k-1$)

Ainsi $(x-y)\times xy\sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i} = \sum_{i=1}^{k-1} x^{i+1} y^{k-i} - \sum_{i=0}^{k-2} x^{i+1} y^{k-i}$

$= x^{k-1+1} y^{k-(k-1)} - x^{0+1} y^{k-0} = x^k y - xy^k = f_k(x,y)$

Donc $\displaystyle xy\sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i} = \frac{f_k(x,y)}{x-y} = g_k(x,y)$

b) D'après la question précédente, on a pour $x \in \mathcal{D}_2$,

$\varphi_k(x) = g_k(x,1-x) = x(1-x)\sum_{i=0}^{k-2} x^i (1-x)^{k-2-i}$.

Or, $\forall i \in [\![0,k-2]\!]$, $x^i(1-x)^{k-2-i} \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} \left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-2-i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$.

Et $x(1-x) \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Donc

$$\varphi_k(x) \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times (k-2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

c'est-à-dire que $\varphi_k(x) \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} \dfrac{k-1}{2^k}$

3) a) Comme $k \geq 2$, on a $\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{k-1}{2^k} \geq \dfrac{1}{2^k}$.

Or pour $x=\frac{1}{2}$, on a $x(1-x)^{k-1} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k}$.

On a donc bien l'inégalité $(*)$ pour $x=\frac{1}{2}$.

b) Pour $x>\frac{1}{2}$ on a $2x-1>0$ ainsi :

$(*) \iff x(1-x)^{k-1} \leq \varphi_k(x) \iff x(1-x)^{k-1} \leq \dfrac{x^k(1-x)-(1-x)^k x}{2x-1}$

$\iff (2x-1)\left(x(1-x)^{k-1}\right) \leq x^k(1-x)-(1-x)^k x$

$\iff (x-(1-x))\,x(1-x)^{k-1} \leq x^k(1-x) - x(1-x)^k$

$\iff x^2(1-x)^{k-1} - x(1-x)^k \leq x^k(1-x) - x(1-x)^k$

$\iff x^2(1-x)^{k-1} \leq x^k(1-x)$

Comme $x \in]0,1[$ on a $x^2>0$ et $1-x>0$ donc

$$x^2(1-x)^{k-1} \leqslant x^k(1-x) \iff (1-x)^{k-2} \leqslant x^{k-2}$$

Or $x > \frac{1}{2}$ donc $2x>1$ donc $x > 1-x$ donc $x^{k-2} \geqslant (1-x)^{k-2}$

Ainsi on a bien $(*)$ dans le cas où $x>\frac{1}{2}$.

c) Dans le cas où $x<\frac{1}{2}$ on a $2x-1<0$ donc

$$(*) \iff x(1-x)^k \leqslant \frac{x^k(1-x)+x(1-x)^k}{2x-1}$$

$$\iff x(1-x)^k \times (2x-1) \geqslant x^k(1-x)+x(1-x)^k$$

$$\iff (1-x)^{k-2} \geqslant x^{k-2}$$ (via les mêmes calculs que précédemment)

Or $x<\frac{1}{2}$ donc $2x<1$ donc $x<1-x$ donc $x^{k-2} \leqslant (1-x)^{k-2}$

Ainsi on a bien $(*)$ dans le cas où $x<\frac{1}{2}$.

4) Soient $k \geqslant 2$ et $x \in]0,1[$:

- si $x=\frac{1}{2}$, alors

$$x\varphi_k(x)+x(1-x)^k = \frac{1}{2}\times\frac{k-1}{2^k}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{k-1+1}{2^{k+1}} = \frac{k}{2^{k+1}} = \varphi_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

donc l'identité $(**)$ est vraie pour $x=\frac{1}{2}$.

- si $x \neq \frac{1}{2}$, alors :

$$x\varphi_k(x)+x(1-x)^k = x\,\frac{x^k(1-x)-(1-x)^kx}{2x-1}+x(1-x)^k$$

$$= \frac{x^{k+1}(1-x)-(1-x)^kx^2+(2x-1)x(1-x)^k}{2x-1}$$

$$= \frac{x^{k+1}(1-x)+(1-x)^k\left(-x^2+(2x-1)x\right)}{2x-1}$$

$$= \frac{x^{k+1}(1-x)+(1-x)^k(x^2-x)}{2x-1}$$

$$= \frac{x^{k+1}(1-x)+x(1-x)^{k+1}}{2x-1} = \varphi_{k+1}(x)$$

donc $(**)$ est vraie pour $x\neq\frac{1}{2}$ également.

5) a) Pour $k \geq 2$ et $x \in]0,1[$ on a, d'après (**) :

$$\varphi_{k+1}(x) = x(1-x)^k + x\varphi_k(x) = x(1-x)^{k-1} \times (1-x) + x\varphi_k(x)$$

donc via (*), et puisque $1-x>0$,

$$\varphi_{k+1}(x) \leq \varphi_k(x) \times (1-x) + x\varphi_k(x)$$

donc $\varphi_{k+1}(x) \leq \varphi_k(x)$.

b) Soient $k \geq 2$ et $x \in]0,1[$:

• si $x = \frac{1}{2}$, alors $\varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k} \geq 0$ car $k-1 \geq 0$

• si $x > \frac{1}{2}$, alors $\varphi_k(x) = \dfrac{x^k(1-x) - (1-x)^k x}{2x-1} = \dfrac{x(1-x)}{2x-1}\left(x^{k-1} - (1-x)^{k-1}\right)$

avec $x>0$, $1-x>0$, $2x-1>0$ et :

comme $x > \frac{1}{2}$, $2x>1$ donc $x > 1-x$ donc $x^{k-1} > (1-x)^{k-1}$

donc $x^{k-1} - (1-x)^{k-1} > 0$.

Par produit de quantités positives, on a donc $\varphi_k(x) \geq 0$.

• si $x < \frac{1}{2}$, alors de même $\varphi_k(x) = \dfrac{x(1-x)}{2x-1}\left(x^{k-1} - (1-x)^{k-1}\right)$

avec $x>0$, $1-x>0$ et cette fois-ci $2x-1<0$ et aussi

$x < 1-x$ donc $x^{k-1} < (1-x)^{k-1}$ donc $x^{k-1} - (1-x)^{k-1} < 0$

On en déduit donc également que $\varphi_k(x) \geq 0$.

c) D'après les questions 5a) et 5b), la suite $(\varphi_k(x))_{k\geq 2}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

6) a) Comme $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ on a $\frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc

$$\frac{k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell + 0 = \ell.$$

b) Comme $k-1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ on a d'après la question 6 a) :

$\frac{k-1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \ell$ donc $\frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{k-1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{\ell}{2}$.

c) Par unicité de la limite de la suite $\left(\frac{k-1}{2^k}\right)_{k \geq 2}$, on a $\ell = \frac{\ell}{2}$

donc $\ell = 0$.

Exercice 3 :

1) Notons d'abord que $g \circ f : E \to G$.

a) Soient $x, x' \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$.
Or g est injective donc $f(x) = f(x')$. Or f est injective donc $x = x'$.
Ainsi $g \circ f$ est injective.

b) Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Mais comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Dès lors,
on a $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ c'est-à-dire que x est un antécédant de z
par $g \circ f$. Ainsi $g \circ f$ est surjective.

2) a) Posons $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. D'après le cours, g est injective. De plus,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = f(x)^2 = h(x)$, donc $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Dès lors, puisque f est injective, h l'est aussi d'après la question
1) a) (avec $E = G = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$).

b) Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$. D'après le cours, f est surjective. De plus,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = g(x^2) = h(x)$ donc $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Dès lors, puisque g est surjective, h l'est aussi d'après la question
1) b) (avec $E = G = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$).