NOM :

PRENOM :

Déterminer les limites suivantes. Chaque réponse doit être justifiée succinctement.

1. (/1 pt) $\lim_{x\to+\infty} 4e^{-2x} - 2e^{4x}$
2. (/1 pt) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - x^3$
3. (/2 pt) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+1}{3^n-1}$
4. (/2 pt) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x+1}{x+1}$
5. (/2 pt) $\lim_{x\to 2^-} \frac{3x+1}{2x-4}$
6. (/2 pts) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Solution :

1. $-2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Similairement, $e^{4x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $4e^{-2x} - 2e^{4x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
2. $\frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\frac{1}{x} - x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. On a $\frac{3^n+1}{3^n-1} = \frac{1+(\frac{1}{3})^n}{1-(\frac{1}{3})^n}$. Or $\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Donc $\frac{3^n+1}{3^n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{1-0} = 1$.
4. On a $\frac{x^3-x+1}{x+1} = \frac{x^3}{x} \times \frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}} = x^2 \times \frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}$. Or pour $k \in \{1,2,3\}$, $\frac{1}{x^k} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Et $x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\frac{x^3-x+1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. $3x+1 \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 7$ et $2x-4 \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} 0^-$ car si $x<2$ alors $2x<4$ ou encore $2x-4<0$. Donc $\frac{3x+1}{2x-4} \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} -\infty$.
6. $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $\sqrt{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$ donc $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

NOM :

PRENOM :

Déterminer les limites suivantes. Chaque réponse doit être justifiée succinctement.

1. (/1 pt) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-4x} - 4e^{2x}$
2. (/1 pt) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 - \dfrac{1}{x}$
3. (/2 pt) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$
4. (/2 pt) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x - 1}{x - 1}$
5. (/2 pt) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x + 3}{2x - 6}$
6. (/2 pts) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

Solution :

1. $-4x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^y \underset{y \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-4x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Similairement, $e^{2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $2e^{-4x} - 4e^{2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
2. $x^5 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $x^5 - \dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
3. On a $\dfrac{2^n - 1}{2^n + 1} = \dfrac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 + (\frac{1}{2})^n}$. Or $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$. Donc $\dfrac{2^n - 1}{2^n + 1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1 - 0}{1 + 0} = 1$.
4. On a $\dfrac{x^3 + x - 1}{x - 1} = \dfrac{x^3}{x} \times \dfrac{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x}} = x^2 \times \dfrac{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x}}$. Or pour $k \in \{1, 2, 3\}$, $\dfrac{1}{x^k} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\dfrac{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Et $x^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\dfrac{x^3 + x - 1}{x - 1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. $2x + 3 \underset{x \to 3}{\longrightarrow} 9$ et $2x - 6 \underset{x \to 3^-}{\longrightarrow} 0^-$ car si $x < 3$ alors $2x < 6$ ou encore $2x - 6 < 0$. Donc $\dfrac{2x + 3}{2x - 6} \underset{x \to 3^-}{\longrightarrow} -\infty$.
6. $x^2 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0^+$ donc $\dfrac{x^2}{e^x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.