

Exercice 1

$$1. \text{ Vérifier que } (1, -2, -1) \text{ est solution du système suivant : } \begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x + z = 1 \\ -x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

2. Vérifier que pour toute valeur de $z \in \mathbb{R}$ le triplet $(1 + z, 3z - 1, z)$ est solution de

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

3. Vérifier que pour toutes valeurs de $y, t \in \mathbb{R}$ le quadruplet $(1 + \frac{y}{2} + \frac{t}{2}, y, -2 + \frac{y}{2} - \frac{3t}{2}, t)$ est solution

$$\text{de } \begin{cases} x - y + z + t = -1 \\ 3x - y - z - 3t = 5 \end{cases}$$

Exercice 2

Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives et déterminer leurs bijections réciproques :

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$

2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $g(x, y) = (2x - y, 2y)$.

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2z - y - 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ 6 - 3z = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 = -1 \\ 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 2 \\ 3x_5 + 2x_6 = -1 \\ 2x_6 = -6 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x + 5y = 15 \\ x - 5y = 5 \end{cases} \quad (\text{On proposera deux méthodes})$$

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2y - 5z = 0 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2z + t = -1 \end{cases}$$

Exercice 5

Dans une ferme élevant des lapins et des poulets, il y a au total 27 animaux et 72 pattes d'animaux. Combien y a-t-il de lapins et de poulets ?

Exercice 6

Complétez les systèmes suivants (au crayon de bois!) en effectuant les opérations indiquées. Terminez ensuite la résolution.

1)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 8 \\ 3x - y - 2z = -7 \\ x + 3y + z = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - y - 2z = -7 \\ x + 3y + z = -4 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + z = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + z = -4 \end{cases} \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -8 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \\ y = \end{cases} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5x - 4y - 3z = 10 \\ -2x - 3y + z = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5x - 4y - 3z = 10 \\ -2x - 3y + z = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5x - 4y - 3z = 10 \\ -2x - 3y + z = 5 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x - y + z = -1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow 2L_2) \\ (L_3 \leftarrow 2L_3) \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ y + z = -1 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 5) \\
 & \begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x - y + z = -1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} & (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -y - z = 1 \\ & (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}
 \end{aligned}$$

Avez-vous remarqué que les systèmes 4) et 5) sont les mêmes? Quelle méthode de résolution avez-vous préféré?

Exercice 7

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ 3x + 8y - 11z = 7 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 2x - y - 4z = 2 \\ 4x - 2y - 6z = 5 \\ 6x - 3y - 8z = 8 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3x + 4y + 7z = 4 \end{cases}$$

$$(S_4) : \begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 2x - 2y + 4z - t = 4 \\ x + y + z - 3t = -1 \\ -z + t = -3 \end{cases}$$

$$(S_5) : \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y - z = 3 \\ 5x + 5y - 9z = 7 \\ 2x - 6y + 14z = -2 \end{cases}$$

$$(S_6) : \begin{cases} 2x - y + 3z = y \\ -2y - 6z = x \\ 4x - 4y - 8z = z \end{cases}$$

$$(S_7) : \begin{cases} 2x - y + z = -y \\ x - 2y - 6z = x \\ 6x - 3y - 2z = 1 - 2z \end{cases}$$

$$(S_8) : \begin{cases} 2x - 3y + z + t = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + z + t = 0 \end{cases}$$

Exercice 8

Résoudre le système à n inconnues et n équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases}$$

On commencera par s'assurer d'avoir bien compris ce que signifient les pointillés.

Exercice 9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S_0) : \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$$(S_1) : \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ x + y - 7z = a \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = a \\ \quad 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 6z = b \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 2y + az = b \end{cases}$$

Exercice 10

Déterminer les solutions des systèmes suivants en fonction du paramètre réel λ .

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ x + y + z = \lambda z \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 2x - y - 2z = \lambda x \\ 2x - y - 4z = \lambda y \\ -x + y + 3z = \lambda z \end{cases}$$

Exercice 11

Déterminer les solutions des systèmes suivants en fonction du paramètre réel m .

$$(S_1) : \begin{cases} (m-1)x - my = m \\ (m+1)x + (m+1)y = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} mx + y + z = m \\ x + y + mz = 2m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$