Exercice 4

Résoudre le système à n inconnues et n équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & 3x_n & = & 1 \\ & \vdots & & & & & & & & \vdots & \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$

On commencera par s'assurer d'avoir bien compris ce que signifient les pointillés.

Solution :

On commence par utiliser la première ligne pour éliminer x_1 de toutes les lignes inférieures. Pour cela on fait les opérations $L_k \longleftarrow L_k - L_1$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & \dots & + & 2x_n & = & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & \dots & + & (n-1)x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

On poursuit en utilisant la deuxième ligne pour éliminer x_2 des lignes inférieures en faisant $L_k \longleftarrow L_k - L_2$ pour tout $k \in [\![3, n]\!]$. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & \dots & + & 2x_n & = & 0 \\ & & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & \dots & + & (n-2)x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

On remarque que les sous-systèmes qu'on obtient sont toujours de la même forme (mais avec moins de variables). En répétant ce procédé pour éliminer $x_3, x_4, \dots, x_{n-1}$ on obtient alors le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & \dots & + & x_n & = & 0 \\ & & & & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ & & & & & & & & & & x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

duquel on déduit successivement que $x_n = x_{n-1} = \dots = x_3 = x_2 = 0$ et $x_1 = 1$. Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(1, 0, 0, \dots, 0)\}$.

Exercice 8
Déterminer les solutions des systèmes suivants en fonction du paramètre réel m.

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & 2m \\ x & + & my & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Solution :

$$(S_2) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & + & z & = & m \ (L_2 \longleftrightarrow L_1) \\ x & + & my & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & mz & = & 2m \\ & & (1-m)y & + & (1-m^2)z & = & m-2m^2 = m(1-2m) \ (L_2 \longleftarrow L_2 - mL_1) \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & 1-2m \ (L_3 \longleftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & mz & = & 2m \\ & & (1-m)y & + & (1-m^2)z & = & m(1-2m) \\ & & & & (2-m-m^2)z & = & (1-2m)(m+1) \ (L_3 \longleftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

On calcule alors que $(2-m-m^2) = -(m-1)(m+2)$ de sorte qu'on va distinguer les cas $m = 1$ et $m = -2$.
Si $m = 1$ ou $m = -2$, alors on a $(1-2m)(m+1) \neq 0$. Ainsi la dernière ligne du système précédent est une condition de compatibilité non vérifiée : il n'y a pas de solutions.
Sinon, alors on peut diviser par $(2-m-m^2)$ la ligne L_3 pour obtenir z, puis par $(1-m)$ la ligne L_2 pour en déduire y, et obtenir x grâce à L_1. On trouve après simplification que

$$\begin{aligned} z &= \frac{(m+1)(2m-1)}{(m-1)(m+2)} \\ y &= \frac{m(1-2m)}{1-m} - \frac{1-m^2}{1-m}z = \frac{1-2m}{(m-1)(m+2)} \\ x &= 2m - y - mz = \frac{m^2-m-1}{(m-1)(m+2)} \end{aligned}$$

Finalement,

- pour $m \in \{-2, 1\}$, $\mathcal{S} = \emptyset$
- pour $m \notin \{-2, 1\}$, $\mathcal{S} = \{(\frac{m^2-m-1}{(m-1)(m+2)}, \frac{1-2m}{(m-1)(m+2)}, \frac{(m+1)(2m-1)}{(m-1)(m+2)})\}$.