Exercice 1 (Pièges du produit matriciel)
Dans chacun des cas suivants, calculer les produits matriciels demandés puis identifier une règle de calcul vraie pour les nombres réels qui n'est plus vraie pour les matrices.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

   Moralité :

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC.

   Moralité :

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.

   Moralité :

4. Mêmes matrices que dans le 3. Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2.

   Moralité :

5. Mêmes matrices que dans le 3. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

   Moralité :

Exercice 2
Dans chacun des cas suivants, lesquels des neuf produits formés à partir de deux des matrices suivantes sont réalisables ? Que valent alors ces produits (présentez vos résultats dans un tableau à double entrée) ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AM = MA$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec B, c'est-à-dire telles que $BM = MB$.

Exercice 4
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
1. Calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de A.
2. En déduire A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5
Déterminer M^n pour tout $n \geq 0$ dans chacun des cas suivants (on commencera par calculer à la main M^n pour de petites valeurs de n) :

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
1. Calculer successivement A^2, A^3, A^4 et A^5.
2. Émettre alors une conjecture sur l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

Exercice 7 (extrait d'un DS précédent)

Partie A. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer J^2 en fonction de J.
2. Quelle relation y a-t-il entre M, J et I_3 ?
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I_3 + \alpha_n J$
   où (α_n) est la suite définie par $\alpha_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 1$.
4. Conclure en donnant l'expression de M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Quelle relation y a-t-il entre X_n, X_{n+1} et M ?
2. En déduire l'expression de X_n en fonction de M et de X_0.
3. Conclure en donnant l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 8

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R},\ R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R(\theta)^n = R(n\theta)$.
3. (a) Que vaut $R(0)$?
   (b) Rappeler la *définition* d'une matrice inversible.
   (c) En utilisant la question 1 et la définition d'une matrice inversible, montrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et donner son inverse.
4. Retrouvez le fait que $R(\theta)$ et inversible ainsi que la valeur de $R(\theta)^{-1}$ grâce à une *propriété* du cours.

Exercice 9
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ dans chacun des cas suivants grâce au binôme de Newton (a désigne un nombre complexe quelconque).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$

Exercice 10

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices $A^T,\ B^T,\ C^T,\ A\,A^T,\ C\,C^T$ et C^TC.

Exercice 11
Pour quels valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Donner alors son inverse.

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse en fonction de A^2, A et I_3.
3. La matrice A^2 est-elle inversible ? Si oui, exprimer $(A^2)^{-1}$ en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 13
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n + v_n \\ v_{n+1} &= -2u_n + v_n \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Soit enfin $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$. En déduire l'expression de X_n en fonction de A et de X_0.
2. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$, puis déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En utilisant uniquement le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On commencera par exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.
5. Conclure en donnant l'expression de u_n et v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.