

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 \\ 11 & -9 & 3 \\ 9 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ et soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calculer $B = P^{-1}AP$ et donner deux matrices D et N telles que $B = D + N$ avec D diagonale et N une matrice dont tous les coefficients sauf un sont nuls.
3. Calculer N^2 , DN et ND .
4. En déduire l'expression de B^n puis celle de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0$. Montrer que si A est nilpotente alors $I_n - A$ est inversible. *Indication : simplifier, pour $q \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, la quantité $(1 - q) \sum_{k=0}^m q^k$.*

Exercice 16

Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} m & 1 - m & 1 + m \\ 0 & 1 - m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$
(pour $m \in \mathbb{R}$.)
3. $C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Exercice 17

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{C}$ la matrice $B = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 18

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1} .

2. Sans plus de calculs, résoudre le système
$$\begin{cases} x + 3y + 4z + 4t = -4 \\ x + y + 4z + t = -2 \\ x + 3y + 3z + 2t = 2 \\ x + 3y + 4z + 5t = 4 \end{cases}$$

3. Sans plus de calculs, résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + y + 3z + 3t = 2 \\ 4x + 4y + 3z + 4t = 4 \\ 4x + y + 2z + 5t = 6 \end{cases}$$