TD 10

exo 9.3 :

Écrivons $A = aI_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $aI_3B = aB = BaI_3$ on a d'après le binôme de Newton :

$$A^n = (aI_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_3)^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} B^k.$$

Or on a vu dans l'exercice 5.1 que : $\forall k \geq 1,\ B^k = 3^{k-1} B$.

Ainsi $A^n = \binom{n}{0} a^{n-0} B^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} 3^{k-1} B$

$$= a^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} 3^{k-1} \right) B$$

On calcule par ailleurs que :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} 3^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} 3^{k-1} \right) - \binom{n}{0} a^n 3^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} 3^k - \frac{a^n}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(a+3)^n - \frac{a^n}{3}$$

Ainsi $A^n = a^n I_3 + \dfrac{(a+3)^n - a^n}{3} B$.