

TD 10 :

exo 12.3 :

On a vu que  $A^3 + 3A^2 + 3A + \frac{I_3}{3} = 0$  et que  $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3\frac{I_3}{3}$

méthode 1 : D'après le cours,  $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$  donc

$$\begin{aligned}(A^2)^{-1} &= \left(-A^2 - 3A - 3\frac{I_3}{3}\right)\left(-A^2 - 3A - 3\frac{I_3}{3}\right) \\ &= A^4 + 3A^3 + 3A^2 + 3A^3 + 9A^2 + 9A + 3A^2 + 9A + 9\frac{I_3}{3} \\ &= A^4 + 6A^3 + 15A^2 + 18A + 9\frac{I_3}{3}\end{aligned}$$

Par ailleurs,  $A^3 = -3A^2 - 3A - \frac{I_3}{3}$  et donc

$$A^4 = -3A^3 - 3A^2 - A = -3\left(-3A^2 - 3A - \frac{I_3}{3}\right) - 3A^2 - A = 6A^2 + 8A + 3\frac{I_3}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi : } (A^2)^{-1} &= A^4 + 6A^3 + 15A^2 + 18A + 9\frac{I_3}{3} \\ &= 6A^2 + 8A + 3\frac{I_3}{3} + 6\left(-3A^2 - 3A - \frac{I_3}{3}\right) + 15A^2 + 18A + 9\frac{I_3}{3} \\ &= 3A^2 + 8A + 6\frac{I_3}{3}\end{aligned}$$

méthode 2 : Reexploitons  $A^3 + 3A^2 + 3A + \frac{I_3}{3} = 0$  pour écrire que

$$-A^3 - 3A^2 - 3A = \frac{I_3}{3} \text{ donc } A^2(-A - 3\frac{I_3}{3} - 3A^{-1}) = \frac{I_3}{3} \text{ et aussi}$$

$$\begin{aligned}(-A - 3\frac{I_3}{3} - 3A^{-1})A^2 &= \frac{I_3}{3} \text{ . Ainsi } (A^2)^{-1} = -A - 3\frac{I_3}{3} - 3A^{-1} \\ &= -A - 3\frac{I_3}{3} - 3(-A^2 - 3A - 3\frac{I_3}{3}) \\ &= 3A^2 + 8A + 6\frac{I_3}{3}.\end{aligned}$$