Mathématiques - mercredi 24 janvier 2023
Devoir nº5 Durée : 3 h 30 min

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet est constitué de 5 exercices indépendants.**
- **On rendra l'exercice d'informatique sur une copie séparée.**

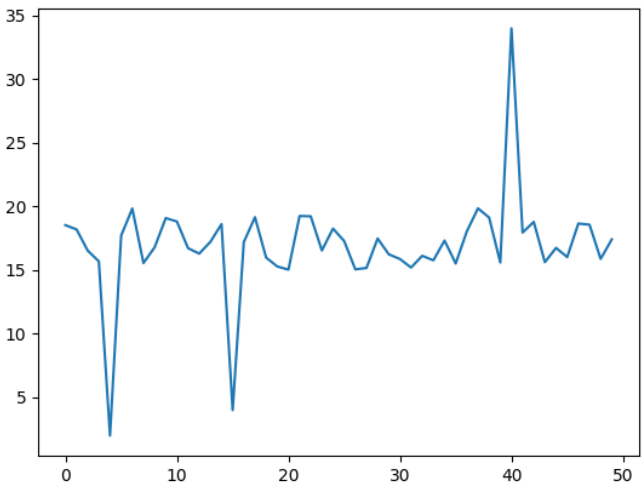
Exercice 1 (Informatique)**.**
Une classe de BCPST étudie la croissance d'une nouvelle espèce de haricot. Les élèves (qui sont numérotés $1, 2, 3, \dots$) reçoivent chacun une graine de haricot à planter, puis doivent mesurer la hauteur de la plante après une durée fixée. Toutes les mesures faites par la classe sont alors rassemblées dans une liste Python `L`, le k-ème élément de `L` correspondant à la mesure faite par le k-ème élève. On s'intéresse à la hauteur moyenne de la plante.

1. Écrire une fonction `moyenne` prenant en argument la liste `L` et renvoyant sa moyenne.

Pour visualiser comment les mesures faites par la classe sont réparties autour de la moyenne, on souhaite afficher les valeurs de `L` sur un graphique.

2. Écrire une fonction `trace` prenant en argument la liste `L` et représentant la mesure faite par l'élève numéro k en fonction de k.

On obtient (par exemple) la courbe ci-dessous. Dans celle-ci, trois mesures semblent "anormales",



il est raisonnable de penser qu'elles sont dues à des erreurs de mesure ou à des graines abîmées. On souhaite donc exclure de la liste `L` ces données "aberrantes".

De manière générale, on dit qu'une mesure x de la liste `L` est aberrante lorsque x s'éloigne de la moyenne de `L` de plus de deux fois l'écart-type de `L`, c'est-à-dire lorsque $x < m - 2\sigma$ ou $x > m + 2\sigma$ où m est la moyenne de `L` et σ son écart-type.

3. Si on note $x_1, x_2, \dots, x_N$ les éléments de `L`, rappeler la définition de l'écart-type σ. Écrire ensuite une fonction `ecart` prenant en argument `L` et renvoyant σ.
4. En utilisant les fonctions précédentes, écrire une fonction `select` prenant en argument la liste `L` et renvoyant une liste `L_corrige` contenant uniquement les valeurs de `L` qui ne sont pas aberrantes.

Exercice 2. Soit f la fonction donnée par l'expression suivante :

$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right).$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]2,+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer l'expression de $f^{-1} : J \longrightarrow]2,+\infty[$.

Exercice 3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)\,x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & + & (3-\lambda)\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

Résoudre le système $(\mathcal{S})$ et préciser son rang en fonction de la valeur de λ.

Exercice 4. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
2. En déduire l'expression de X_n en fonction de M et de X_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ *(une preuve est attendue)*.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ M^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$.
4. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

On rappelle qu'il est possible d'utiliser le résultat d'une question même si on n'a pas réussi à traiter cette question.

Partie 1 :

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est pseudo-bistochastique lorsque la somme de ses coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut 1. Par exemple $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est pseudo-bistochastique car les sommes sur ses lignes et ses colonnes valent $2 + (-1) = (-1) + 2 = 1$. En revanche, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas pseudo-bistochastique car la somme de sa deuxième ligne vaut $3 + 2 = 5$ (ou car la somme de sa première colonne vaut $2 + 3 = 5$).

On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des matrices pseudo-bistochastiques.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est pseudo-bistochastique si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$.

Dans la suite de l'exercice on note pour $t \in \mathbb{R}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$. La question 1 montre donc que l'ensemble des matrices pseudo-bistochastiques est $\mathcal{P}_2 = \{B(t), \ t \in \mathbb{R}\}$.

2. Montrer que pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ on a $B(t)B(s) = B(1 - t - s + 2ts)$.

La question 2 montre donc que si $A, B \in \mathcal{P}_2$ alors $AB \in \mathcal{P}_2$.

3. On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est pseudo-bistochastique si et seulement si $AU = A^T U = U$.
4. Déduire de la question 3 une autre preuve du fait que si $A, B \in \mathcal{P}_2$ alors $AB \in \mathcal{P}_2$.

Partie 2 :
On note $\mathcal{M}_2^+$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^+$, mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \notin \mathcal{M}_2^+$.

5. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_2^+$ alors $AB \in \mathcal{M}_2^+$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est bistochastique lorsque A est pseudo-bistochastique et que tous ses coefficients sont positifs ou nuls. On note $\mathcal{B}_2$ l'ensemble des matrices bistochastiques, c'est-à-dire que $\mathcal{B}_2 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{M}_2^+$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est bistochastique si et seulement s'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $A = B(t)$.

La question 6 montre donc que l'ensemble des matrices bistochastiques est $\mathcal{B}_2 = \{B(t),\ t \in [0, 1]\}$.

7. En utilisant les questions précédentes, montrer que si $A, B \in \mathcal{B}_2$ alors $AB \in \mathcal{B}_2$.

Partie 3 :
On fixe désormais $\alpha \in [0, 1]$ et on s'intéresse aux puissances de la matrice $B(\alpha)$ c'est-à-dire aux matrices $B(\alpha)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

8. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ B(\alpha)^n \in \mathcal{B}_2$

La question précédente justifie donc l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un réel $t_n \in [0, 1]$ tel que $B(\alpha)^n = B(t_n)$.

9. En utilisant la question 2 de la partie 1, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = (2\alpha - 1)t_n + 1 - \alpha$.
10. Conclure en déterminant l'expression de t_n en fonction de n et de α.
11. Quel est le comportement de la suite de matrices $(B(\alpha)^n)$ lorsque $n \to +\infty$?