# DS 5 - Corrigé :

## Exercice 1 :

1)
```python
def moyenne(L):
    return sum(L)/len(L)
```

2)
```python
import matplotlib.pyplot as plt
def trace(L):
    n = len(L)
    absi = [k for k in range(1,n+1)]
    plt.plot(absi, L)
    plt.show()
```

3) On a $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$ où $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$

```python
def ecart(L):
    S = 0
    m = moyenne(L)
    for x in L:
        S = S + (x-m)**2
    return (S/len(L))**(1/2)
```

4)
```python
def select(L):
    m = moyenne(L)
    s = ecart(L)
    L_corrige = []
    for x in L:
        if x >= m-2*s and x <= m+2*s:
            L_corrige.append(x)
    return L_corrige
```

Exercice 2 :

1) Tout d'abord, pour tout $x>2$, $x-2>0$ et $x+3>0$ donc $\frac{x-2}{x+3}>0$, on peut donc bien considérer $f: ]2,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, et $f$ est dérivable sur $]2,+\infty[$. De plus, comme, pour $x\in]2,+\infty[$, on a $x-2>0$ et $x+3>0$ on a $f(x)=\ln(x-2)-\ln(x+3)$. Ainsi :

$$\forall x>2,\ f'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{5}{(x-2)(x+3)}>0$$

car $x-2>0$ et $x+3>0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $]2,+\infty[$.

Par ailleurs, $\frac{x-2}{x+3}\xrightarrow[x\to 2^+]{}0^+$ (car si $x>2$ alors $x-2>0$ et $x+3>0$)

Or $\ln(y)\xrightarrow[y\to 0^+]{}-\infty$, donc $\boxed{f(x)\xrightarrow[x\to 2^+]{}-\infty}$.

Et en écrivant, pour $x>2$, que $\frac{x-2}{x+3}=\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}$, on voit que

$\frac{x-2}{x+3}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ (car $\frac{2}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ et $\frac{3}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$). Or $\ln(y)\xrightarrow[y\to 1]{}0$

donc $\boxed{f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$

Finalement, le tableau de variations de $f$ est

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\|\|$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

Comme $f$ est strictement croissante et continue sur $]2,+\infty[$, $f$ réalise donc une bijection de $]2,+\infty[$ sur $f(]2,+\infty[)=]-\infty,0[$.

Ainsi $\boxed{f: ]2,+\infty[ \longrightarrow ]-\infty,0[ \text{ est bijective}}$

2) Soit $y\in]-\infty,0[$, résolvons, pour $x\in]2,+\infty[$, l'équation

$f(x)=y \iff \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)=y \iff \frac{x-2}{x+3}=e^y$ (correct car $\frac{x-2}{x+3}>0$)

$\iff (x-2)=(x+3)e^y$ (correct car $x+3\neq 0$)

$\iff x-2 = xe^y + 3e^y$

$\iff x(1-e^y) = 2+3e^y$

$\iff x = \dfrac{2+3e^y}{1-e^y}$ où cette dernière équivalence est correcte car

$y<0$ donc $e^y<1$ donc $1-e^y>0$ donc $1-e^y\neq 0$.

Finalement, $\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : ]-\infty,0[ \longrightarrow ]2,+\infty[ \\ \quad : y \longmapsto \dfrac{2+3e^y}{1-e^y}\end{array}}$

Exercice 3 :

On a : $(S) \iff \begin{cases} -x+y+(3-\lambda)z = 0 \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \\ (3-\lambda)x - y - z = 0 \end{cases}$ $(L_1 \leftrightarrow L_3)$

$\iff \begin{cases} -x+y+(3-\lambda)z = 0 \\ \quad\;\; y+2z = 0 \\ (-1+(3-\lambda))y + (-1+(3-\lambda)^2)z = 0 \end{cases}$ $(L_3 \leftarrow L_3 + (3-\lambda)L_1)$

$\iff \begin{cases} -x+y+(3-\lambda)z = 0 \\ \quad\;\; y+2z = 0 \\ (2-\lambda)y + ((3-\lambda)^2-1)z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x+y+(3-\lambda)z = 0 \\ \quad\;\; y+2z = 0 \\ ((3-\lambda)^2-1-2(2-\lambda))z = 0 \end{cases}$ $(*)$ $(L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_2$

Or $(3-\lambda)^2-1-2(2-\lambda) = \lambda^2-6\lambda+9-1-4+2\lambda = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$

et $(\lambda-2)^2=0 \iff \lambda = 2$.

On distingue donc 2 cas :

$\boxed{\bullet \text{ si } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{2\}}$ alors

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+(3-\lambda)z = 0 \\ y+2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

donc le rang du système est 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y+(3-\lambda)z = 0 \\ y = -2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

et l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}}$

$\boxed{\bullet \text{ si } \lambda = 2}$ alors

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+(3-2)z = 0 \\ y+2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

donc le rang du système est 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y+z = -2z+z = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

et l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{(-z,-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}}$

## Exercice 4 :

1) Prenons $\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$MX_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n \\ -u_n+2v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

2) On en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\boxed{X_n = M^n X_0}$. Démontrons-le par récurrence :

- tout d'abord pour $n=0$, $M^0X_0 = I_2X_0 = X_0$ ce qu'il fallait démontrer
- ensuite, si $X_n = M^nX_0$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$, alors :

$X_{n+1} = MX_n = MM^nX_0 = M^{n+1}X_0$ ce qu'il fallait démontrer.

3) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$.

• tout d'abord pour $n=0$, d'une part $M^0 = I_2$ et d'autre part $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^0 & 1-3^0 \\ 1-3^0 & 1+3^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ on a donc bien la formule souhaitée dans le cas $n=0$.

• Supposons ensuite que $M^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$M^{n+1} = M^n M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(1+3^n)-(1-3^n) & -(1+3^n)+2(1-3^n) \\ 2(1-3^n)-(1+3^n) & -(1-3^n)+2(1+3^n) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3\times 3^n & 1-3\times 3^n \\ 1-3\times 3^n & 1+3\times 3^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^{n+1} & 1-3^{n+1} \\ 1-3^{n+1} & 1+3^{n+1} \end{pmatrix}$$ ce qu'il fallait démontrer.

4) Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0 = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2(1+3^n)+3(1-3^n) \\ -2(1-3^n)+3(1+3^n) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-5\times 3^n \\ 1+5\times 3^n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{u_n = \frac{1-5\times 3^n}{2}}$ et $\boxed{v_n = \frac{1+5\times 3^n}{2}}$

Exercice 5

1) Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et démontrons que $A$ est pseudo-bistochastique si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $a = d = t$ et $b = c = 1-t$.

($\Rightarrow$) Supposons que $A$ est pseudo-bistochastique. Posons alors $t = a$. Comme $A$ est pseudo-bistochastique, on a $a+b=1$ donc $b = 1-a = 1-t$. On a aussi $a+c=1$ donc $c = 1-a = 1-t$. Enfin, on doit également avoir $b+d=1$ donc $d = 1-b = 1-(1-t) = t$. Ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$.

($\Leftarrow$) Réciproquement si $A = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, alors les sommes sur ses lignes comme celles sur ses colonnes valent $t + (1-t) = 1$ et $(1-t)+t = 1$. Donc $A$ est pseudo-bistochastique.

2) Soient $t, s \in \mathbb{R}$, on calcule que

$$B(t)B(s) = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1-s \\ 1-s & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$$

avec $u = ts + (1-t)(1-s) = 1-t-s+2ts$

et $v = (1-t)s + t(1-s) = t+s-2ts = 1-(1-t-s+2ts) = 1-u$

Ainsi on a bien $\boxed{B(t)B(s) = B(u) = B(1-t-s+2ts).}$

3) Notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$AU = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^T U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

Ainsi $A \in P_2 \iff \begin{cases} a+b=1 \\ c+d=1 \\ a+c=1 \\ b+d=1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \underline{AU = A^T U = U}$$

4) Soient $A, B \in \mathcal{P}_2$. D'après la question 3) on a donc $AU = A^T U = U$ et $BU = B^T U = U$. Dès lors :

$$ABU = AU = U \quad \text{et} \quad (AB)^T U = B^T A^T U = B^T U = U$$

donc (toujours d'après la question 3)) $AB \in \mathcal{P}_2$.

5) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^+$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^+$ on a donc $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{R}^+$. On calcule que

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

Comme $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{R}^+$ on a alors $aa' + bc' \geqslant 0$, $ab' + bd' \geqslant 0$, $ca' + dc' \geqslant 0$ et $cb' + dd' \geqslant 0$, donc $AB \in \mathcal{M}_2^+$.

6) D'après la question 1), $A$ est pseudo-bistochastique si et seulement si $A$ s'écrit $A = B(t)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Pour décider si $A$ est bistochastique, il suffit donc de s'intéresser aux valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $B(t) \in \mathcal{M}_2^+$.

Or $B(t) \in \mathcal{M}_2^+ \iff \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^+ \iff (t \geqslant 0 \text{ et } 1 - t \geqslant 0)$

$$\iff (t \geqslant 0 \text{ et } t \leqslant 1) \iff t \in [0,1].$$

Ainsi les matrices bistochastiques sont exactement les $B(t)$ pour $t \in [0,1]$.

7) Par définition, on a $\mathcal{B}_2 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{M}_2^+$. Soient $A, B \in \mathcal{B}_2$.

D'une part, $A, B \in \mathcal{P}_2$ donc (d'après la question 4)) $AB \in \mathcal{P}_2$.

D'autre part, $A, B \in \mathcal{M}_2^+$ donc (d'après la question 5)) $AB \in \mathcal{M}_2^+$.

Ainsi $AB \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{M}_2^+$ c'est-à-dire que $AB \in \mathcal{B}_2$.

8) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(\alpha)^n \in \mathcal{B}_2$.

- tout d'abord, pour $n=0$, $B(\alpha)^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B(1) \in \mathcal{B}_2$.
- ensuite, si $B(\alpha)^n \in \mathcal{B}_2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors comme $B(\alpha)^{n+1} = B(\alpha)^n B(\alpha)$ avec $B(\alpha)^n, B(\alpha) \in \mathcal{B}_2$ la question 7) donne que $B(\alpha)^{n+1} \in \mathcal{B}_2$ ce qu'il fallait démontrer.

9) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$B(t_{n+1}) = B(\alpha)^{n+1} = B(\alpha)^n B(\alpha) = B(t_n) B(\alpha)$$

Or, d'après la question 2) :

$$B(t_n) B(\alpha) = B(1 - t_n - \alpha + 2t_n \alpha) = B((2\alpha - 1)t_n + 1 - \alpha)$$

Donc $B(t_{n+1}) = B((2\alpha-1)t_n + 1 - \alpha)$. En particulier, en prenant le coefficient d'indice $(1,1)$ de ces deux matrices on en déduit que

$$\boxed{t_{n+1} = (2\alpha - 1)t_n + 1 - \alpha.}$$

10) La suite $(t_n)$ est donc arithmético-géométrique.

On résout, pour $l \in \mathbb{R}$,

$$l = (2\alpha - 1)l + 1 - \alpha \iff (2 - 2\alpha)l = 1 - \alpha$$
$$\iff (1-\alpha)l = \frac{1}{2}(1-\alpha) \quad (*)$$

Excluons le cas $\alpha = 1$ pour pouvoir conclure : $(*) \iff l = \frac{1}{2}$.

On introduit la suite $(v_n) = (t_n - \frac{1}{2})$. Elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = t_{n+1} - \frac{1}{2} = (2\alpha - 1)t_n + 1 - \alpha - \frac{1}{2}$$
$$= (2\alpha - 1)\left(v_n + \frac{1}{2}\right) + 1 - \alpha - \frac{1}{2}$$
$$= (2\alpha - 1)v_n + \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \alpha$$
$$= (2\alpha - 1)v_n$$

Donc $(v_n)$ est géométrique de raison $2\alpha-1$ et de premier terme $v_0 = t_0 - \frac{1}{2}$. Or $t_0$ est défini par le fait que $B(t_0) = B(\alpha)^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B(1)$ donc $t_0 = 1$ et $v_0 = \frac{1}{2}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2} \times (2\alpha-1)^n$ donc $t_n = v_n + \frac{1}{2}$ donne $t_n = \frac{1}{2}\left(1+(2\alpha-1)^n\right)$. $(*)$

Dans le cas $\alpha = 1$, la relation de récurrence sur $(t_n)$ s'écrit :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = (2\times 1-1)t_n + 1-1 = t_n$

donc $(t_n)$ est constante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 = 1$

On remarque alors que la formule $(*)$ fonctionne également puisque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}\left(1+(2\times 1-1)^n\right) = \frac{1+1^n}{2} = \frac{2}{2} = 1$

En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{1}{2}\left(1+(2\alpha-1)^n\right)}$

11) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B(\alpha)^n = B(t_n) = \begin{pmatrix} t_n & 1-t_n \\ 1-t_n & t_n \end{pmatrix}$.

On s'intéresse donc à l'éventuelle limite de $(t_n)$ lorsque $n \to +\infty$

On distingue 3 cas :

- $\boxed{\text{si } 0<\alpha<1}$ alors $0 < 2\alpha < 2$ donc $-1 < 2\alpha - 1 < 1$ donc $(2\alpha-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ et ainsi $\boxed{B(\alpha)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$.
- $\boxed{\text{si } \alpha = 1}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 1$ et ainsi $\boxed{B(\alpha)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$
- $\boxed{\text{si } \alpha = 0}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

donc $(B(\alpha)^n)$ n'a pas de limite mais vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$\boxed{B(\alpha)^{2n} = B(1) = I_2 \text{ et } B(\alpha)^{2n+1} = B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.