Exercice 1

1. Étudier la monotonie des suites suivantes :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 - n - 4$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 2^{-n}\, n!$
   (c) $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n^2 - w_n + 1$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(1 + \frac{k}{\pi}\right)$
2. On veut confirmer grâce à Python les résultats obtenus en 1) pour les suites (u_n) (petit (a)) et (w_n) (petit (c)). Pour cela on veut tracer le graphe de u_n (ou de w_n) en fonction de n. Testez vos codes sur vos propres ordinateurs pour confirmer les résultats obtenus en 1) !
   (a) Compléter le code suivant pour tracer le graphe de u_n en fonction de n pour $n \in [\![0, 20]\!]$. (Il y a exactement le bon nombre de lignes, mais aucune des lignes n'est complète).

```
import
absi = [    for k in                    ]
ordo = [k**2 - k - 4 for k in         ]
plt.plot(
plt.show
```

   (b) Écrire une fonction prenant en argument n et renvoyant la liste `[`w_0`,` w_1`,` w_2`, ...,` w_n`]`. En déduire un code Python permettant de tracer le graphe de w_n en fonction de n pour des valeurs de n que vous choisirez (pas trop grandes).

Exercice 2

Étudier la monotonie des suites suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$
2. $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n\sqrt{1 + v_n^2}$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + 1}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^k}$$

1. Montrer que $\forall n \geq 2,\ u_n \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$.
2. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que la suite (S_n) ne converge pas.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite bornée. Démontrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers 0.

Exercice 6
Étudier la limite des suites suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$
2. $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+k}{n^3+k}$

Exercice 7
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.
2. En déduire la limite la suite (u_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, puis celle de la suite (v_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8
Soit (x_n) la suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1. Démontrer que (x_n) est bien définie.
2. Étudier la limite de (x_n).

Exercice 9
Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 0,\ v_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$
$$u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique puis exprimer $u_n - v_n$ en fonction de n pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Déterminer leur limite commune. *(On pourra considérer l'expression* $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k$*).*

Exercice 10
Soient $(u_n),(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Vrai ou Faux ? Démontrer ou donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) est bornée alors elle converge.
2. Si (u_n) est croissante alors elle est minorée.
3. Si (u_n) et (v_n) sont bornées alors (u_n+v_n) est bornée.
4. Si (u_n) et (v_n) sont croissantes alors $(u_n v_n)$ est croissante.
5. Si (u_n) est décroissante et tend vers 0 alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

Exercice 11
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad , \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Démontrer que : $\forall x, y \geq 0,\ \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geq a_n$.
3. Déterminer alors les sens de variation de (a_n) et (b_n).
4. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent puis que leurs limites sont égales.

La limite commune de (a_n) et (b_n) est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Exercice 12
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 < 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{u_n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Quelle équation doit satisfaire $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$? En déduire la valeur de cette limite.
5. Vérifiez votre réponse à la question précédente en écrivant un programme Python calculant les 50 premiers termes de la suite (u_n) et traçant son allure graphique. On prendra $u_0 = -1$.

Exercice 13
Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite ne prenant que des valeurs entières. On suppose que (u_n) converge. En revenant à la définition d'une suite convergente, montrer que (u_n) est stationnaire.