Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
2. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Si (u_n) converge, quelle équation doit satisfaire sa limite ? En déduire que (u_n) ne peut pas converger.
5. Qu'en déduit-on sur la suite (u_n) ?

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) converge, quelle(s) valeur(s) peut prendre sa limite ?
3. Démontrer que si $0 \leq u_0 \leq 1$ alors (u_n) est majorée par 1.
4. Conclure en déterminant, en fonction de la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}^+$, le comportement de la suite (u_n) et la valeur de son éventuelle limite.

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Justifier que (u_n) est bien définie.
2. Étudier f sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$
4. Déterminer le sens de variation de (u_n).
5. En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+2}$

1. Justifier que (u_n) est bien définie.
2. Déterminer le sens de variation de f.
3. Montrer que les suites $(a_n) = (u_{2n})$ et $(b_n) = (u_{2n+1})$ sont monotones.
4. Si la suite (a_n) converge, quelle(s) valeur(s) peut prendre sa limite ?
5. Finir l'étude de la suite (u_n) en montrant qu'elle converge.

Exercice 18
Déterminer les limites des suites suivantes :

1. (a) $u_n = \dfrac{2^n - \sqrt{n}}{n^2 + 2\ln(n)}$

   (b) $v_n = 4n - \sqrt{n^2+1}$

   (c) $w_n = \dfrac{n! - 3^n}{n^2 + 5^n}$

   (d) $x_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n}$

   (e) $y_n = \dfrac{\ln(1+e^n)}{\sqrt{n}}$

2. (a) $u_n = 2^{n+1}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$

   (b) $v_n = \ln(\cos(1/n))$

   (c) $w_n = n^2\ln(\cos(1/n))$

   (d) $x_n = \dfrac{\ln(1+2^{-n})}{\ln(1+3^{-n})}$

   (e) $y_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$