**Devoir maison nº3**
**À faire pour le lundi 26 février 2024**
*Vous pouvez rendre une copie pour deux élèves.*

*Dans ce devoir maison, de nombreuses questions sont faisables sans avoir réussi les questions précédentes. Pensez à réutilisez les questions précédentes !*

# 1 Série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_{n\geq 1}$ s'appelle "série harmonique".

1. Dans cette question on s'intéresse à la limite de $(H_n)$.
   (a) Déterminer le sens de variation de $(H_n)$.
   (b) En écrivant $H_{2n} - H_n$ sous forme d'une seule somme, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
   (c) Déduire des questions précédentes que $(H_n)$ diverge vers $+\infty$.
2. Que penser de l'équivalence suivante concernant une suite réelle $(u_n)$ ?
   $$(u_n) \text{ converge} \iff (u_{n+1} - u_n) \text{ converge vers } 0.$$
   Pour chaque implication on donnera une preuve ou un contre-exemple.
3. Dans cette question on cherche à montrer que $H_n \sim \ln n$.
   (a) Montrer par études de fonctions que pour tout $x \geq 2$,
   $$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \leq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$
   (b) En déduire un encadrement de $H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Conclure que $H_n \sim \ln n$.
4. *Question Python.* Dans cette question on constate numériquement le comportement de $(H_n)$ grâce à Python.
   (a) Écrire une fonction `harmonique` prenant en argument un entier naturel non nul `n` et renvoyant la liste `[`$H_1, \ldots, H_{\mathtt{n}}$`]`.
   (b) Tracer sur le même graphique $H_n$ en fonction de $n$ et le graphe de la fonction ln. *On constate que ces deux graphes sont "proches" au voisinage de $+\infty$.*

## 2 Suite logistique

En 1976, le biologiste Robert May publie un article popularisant une modélisation de l'évolution d'une population d'individus de la manière suivante :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la taille de la population à la génération $n$ est égale à $u_n \times P$ où $P \in \mathbb{N}$ est un nombre maximal d'individus ($P >> 1$) et $u_n \in [0,1]$. Par exemple pour $P = 10^6$, une population de 300 000 individus à la troisième génération sera modélisée par $u_3 = 0,3$.
- On suppose que la suite $(u_n)$ est la "suite logistique" c'est-à-dire qu'elle est donnée par $u_0 \in ]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_r(u_n)$ où $f_r$ est la fonction donnée par

$$f_r : x \longmapsto r\,x(1-x)$$

où $r \in ]0,4[$ est un paramètre fixé.

1. (a) Montrer que la fonction $x \longmapsto x(1-x)$ admet un maximum sur $[0,1]$ que l'on précisera.
   (b) En déduire que $f_r([0,1]) \subset [0,1]$ puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
2. Si la suite $(u_n)$ converge, quelle(s) valeur(s) peut prendre sa limite ?

Dans la suite de l'exercice, on étudie la suite $(u_n)$ pour différentes valeurs du paramètre $r$.

3. Dans cette question on suppose que $r = 0,5$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n(1-u_n)}{2}$.
   (a) Démontrer que $(u_n)$ est décroissante.
   (b) En déduire que la popultation s'éteint i.e. que $(u_n)$ converge vers 0.
4. Dans cette question on suppose que $r = 2$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$. On suppose de plus que $u_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in ]0, \frac{1}{2}]$.
   (b) En déduire que $(u_n)$ est croissante.
   (c) Conclure que la population se stabilise i.e. que $(u_n)$ converge vers une valeur non nulle que l'on précisera.
5. Dans cette question on suppose que $r = 2,5$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n(1-u_n)}{2}$. On suppose de plus que $u_0 = \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}\right]$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \dfrac{3}{5}\right| \leq \dfrac{9}{16}\left|u_n - \dfrac{3}{5}\right|$.
   (c) Déduire de la question (b) que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - \dfrac{3}{5}\right| \leq \left(\dfrac{9}{16}\right)^n \left|u_0 - \dfrac{3}{5}\right|$.
   (d) Conclure que la population se stabilise i.e. que $(u_n)$ converge vers une valeur non nulle que l'on précisera.
6. Faire des expériences en Python avec $r = 3,2$ ; $r = 3,5$ ; $r = 3,8$. Que dire de l'évolution de la population dans ces cas ?

*Malgré la forme très simple de la relation de récurrence qui la définit, la suite logistique a un comportement très complexe lorsque le paramètre $r$ se rapproche de la valeur 4. Pour un aperçu de ce phénomène on pourra consulter la vidéo "Effet papillon et théorie du chaos" de ScienceEtonnante : `https://www.youtube.com/watch?v=YrOyRCD7M14`.*