Fiche de calcul n° 22

Limites (2). Suites et fonctions.

Prérequis

Suites et fonctions usuelles. Limites usuelles liées au taux d'accroissement. Limites appelées croissances comparées. Limite d'une composée.

Après le cours de première année.

Calcul 22.1

Calculer, si elle existe, la limite des suites (u_n) définies par les expressions suivantes.

a) $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n^3-4}$ ....

b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ....

c) $u_n = n^2\,2^n - 3^n$ ....

d) $u_n = \dfrac{4^n+1}{2-3^n}$ ....

e) $u_n = \dfrac{2-2n^2}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ ....

f) $u_n = \dfrac{3^n - n(-4)^n}{(-5)^n+1}$ ....

Calcul 22.2

Calculer, si elle existe, la limite des suites (u_n) définies par les expressions suivantes.

a) $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$ ....

b) $u_n = 2^n\sqrt{1-2^{-n}} - 2^n$ .....

c) $u_n = n - n\exp\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ ......

d) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ....

e) $u_n = n^{10} - 2^n$ ....

f) $u_n = 2^n 5^{-\sqrt{n}}$ ....

Calcul 22.3

Calculer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes aux valeurs indiquées.

a) Limite de $f(x) = \dfrac{x-e^x}{\ln(x)-x}$ quand x tend vers $+\infty$ ....

b) Limite de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-x^2}$ quand x tend vers 0^+ ....

c) Limite de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$ ....

d) Limite de $f(x) = \dfrac{e^x+x^2}{x^2-x+2}$ quand x tend vers $-\infty$ ....

e) Limite de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ quand x tend vers $+\infty$ ....

f) Limite de $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + x + 1$ quand x tend vers $-\infty$ ....

Calcul 22.4

Calculer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes aux valeurs indiquées.

a) Limite de $f(x) = x - \ln(2x^3)$ quand x tend vers $+\infty$ ....

b) Limite de $f(x) = x - \ln(x + 2e^x)$ quand x tend vers $+\infty$ ....

c) Limite de $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers 0 ....

d) Limite de $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$ quand x tend vers -1 ....

e) Limite de $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ quand x tend vers $+\infty$ ....

f) Limite de $f(x) = x - \sin(x)$ quand x tend vers $-\infty$ ....

g) Limite de $f(x) = x\ln(x - 1) - x\ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ....

h) Limite de $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ quand x tend vers $-\infty$ ....

▶ Réponses et corrigés page 146

Fiche n° 22. Limites (2). Suites et fonctions.

Réponses

22.1 a) .... $\boxed{0}$	**22.3** b) .... $\boxed{-\infty}$
22.1 b) .... $\boxed{0}$	**22.3** c) .... $\boxed{-\infty}$
22.1 c) .... $\boxed{-\infty}$	**22.3** d) .... $\boxed{1}$
22.1 d) .... $\boxed{-\infty}$	**22.3** e) .... $\boxed{1}$
22.1 e) .... $\boxed{0}$	**22.3** f) .... $\boxed{0}$
22.1 f) .... $\boxed{0}$	**22.4** a) .... $\boxed{+\infty}$
22.2 a) .... $\boxed{2}$	**22.4** b) .... $\boxed{-\ln(2)}$
22.2 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$	**22.4** c) .... $\boxed{e}$
22.2 c) .... $\boxed{1}$	**22.4** d) .... $\boxed{3}$
22.2 d) .... $\boxed{0}$	**22.4** e) .... $\boxed{\text{pas de limite}}$
22.2 e) .... $\boxed{-\infty}$	**22.4** f) .... $\boxed{-\infty}$
22.2 f) .... $\boxed{+\infty}$	**22.4** g) .... $\boxed{-1}$
22.3 a) .... $\boxed{+\infty}$	**22.4** h) .... $\boxed{-\infty}$

Corrigés

22.1 a) $$u_n = \frac{n^2+1}{3n^3-4} = \frac{n^2}{3n^3} \times \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{4}{3n^3}\right)} = \frac{1}{3n} \times \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{4}{3n^3}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

22.1 b) $$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

22.1 c) $$u_n = n^2\,2^n - 3^n = -3^n\left(1 - n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$$ en effet $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ *(croissance comparées)*

22.1 d) $$u_n = \frac{4^n+1}{2-3^n} = -\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{1+4^{-n}}{1-2.3^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

22.1 e) $$u_n = \frac{2-2n^2}{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = -2 \times \frac{n^2}{2^n} \times \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$ (En effet : *(croissance comparée)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$)

22.1 f) $$u_n = \frac{3^n - n(-4)^n}{(-5)^n+1} = -\frac{n(-4)^n}{(-5)^n}\,\frac{1-\frac{1}{n}\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1+(-5)^{-n}} = -n\left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1-\frac{1}{n}\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1+(-5)^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(croissance comparée) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$)

22.2 a) $$u_n = n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = 2\,\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$ car $\dfrac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$

22.2 b) $$u_n = 2^n\sqrt{1-2^{-n}} - 2^n = -\frac{\sqrt{1-2^{-n}}-1}{-2^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$ car $2^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$

22.2 c) $$u_n = n - n\exp\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$ car $-\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{e^x-1}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$

22.2 d) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ est bornée

22.2 e) $u_n = n^{10} - 2^n = -2^n\left(1 - \dfrac{n^{10}}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ car $\dfrac{n^{10}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *(Croissances comparées)* .

22.2 f) $u_n = 2^n 5^{-\sqrt{n}} = \exp\big(n\ln(2) - \sqrt{n}\ln(5)\big)$ or $n\ln(2) - \sqrt{n}\ln(5) = n\ln(2)\left(1 - \dfrac{\ln(5)}{\ln(2)\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

22.3 a) $f(x) = \dfrac{x - e^x}{\ln(x) - x} = \dfrac{e^x}{x}\dfrac{1 - \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{\ln(x)}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

(croissances comparées)

22.3 b) $\dfrac{x^2-1}{x-x^2} = \dfrac{1}{x}\dfrac{x^2-1}{1-x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2-1}{1-x} = -1 \quad (<0)$

22.3 c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}} = -x\sqrt{x}\,\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

22.3 d) $f(x) = \dfrac{e^x + x}{x^2 - x + 2} = \dfrac{x^2}{x^2}\dfrac{1+\frac{e^x}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{1+\frac{e^x}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$

22.3 e) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x) + \ln\big(1+\frac{1}{x}\big)}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\ln\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$

22.3 f) Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ et au voisinage de $-\infty$, $x + 1 = -\sqrt{(x+1)^2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + x + 1 = \frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

22.4 a) $f(x) = x - \ln(2x^3) = x - \ln(2) - 3\ln(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{x} - 3\dfrac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

(croissance comparée)

22.4 b) $f(x) = x - \ln(x + 2e^x) = x - x - \ln\big(2 + xe^{-x}\big) = -\ln\big(2 + xe^{-x}\big) \longrightarrow -\ln(2)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

(croissance comparée)

22.4 c) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\Big)$ or $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = e^1$

22.4 d) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1 \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 3$

22.4 e) Les suites $(f(n))$ et $(f(n+\dfrac{1}{2}))$ ont des limites diférentes $\quad (0$ et $\dfrac{1}{2})$

22.4 f) $f(x) \leqslant x + 1$ et $x + 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *(Théorème de comparaison)*

22.4 g) $f(x) = x\ln(x-1) - x\ln(x) = x\ln\Big(1 - \dfrac{1}{x}\Big) = -\dfrac{\ln\big(1-\frac{1}{x}\big)}{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ car $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

22.4 h) $f(x) \leqslant 2x \quad \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ *(Théorème de comparaison)*