TD 11 : Corrigés

exo 11 :

1) Pour $x, y \geq 0$ on a $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}) = \frac{1}{2}(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ donc $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

2) Sans récurrence : • pour $n=0$ on a $b_0 = b \geq a = a_0$

• pour $n \geq 1$ on a $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = a_n$ en utilisant l'inégalité de la question 1 avec $x = a_{n-1}$ et $y = b_{n-1}$ qui respectent bien $a_{n-1} \geq 0$ et $b_{n-1} \geq 0$ (car on pourrait prouver aisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$).

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, • comme $b_n \geq a_n \geq 0$ on a $a_n b_n \geq a_n^2$ donc $\sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2}$ donc $a_{n+1} \geq a_n$. Ainsi $(a_n) \nearrow$.

• Comme $b_n \geq a_n$ on a $2b_n \geq a_n + b_n$ donc $b_n \geq \frac{a_n+b_n}{2}$ donc $b_n \geq b_{n+1}$. Ainsi $(b_n) \searrow$.

4) • Comme $(a_n) \nearrow$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a_0$. Or d'après 2), $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \geq a_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \geq a_0$. Ainsi (b_n) est minorée et, d'après 3), $(b_n) \searrow$ donc (b_n) converge.

• Comme $(b_n) \searrow$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \leq b_0$. Or d'après 2), $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \geq a_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_0$. Ainsi (a_n) est majorée et, d'après 3), $(a_n) \nearrow$ donc (a_n) converge.

• Notons $l_a = \lim_{n \to +\infty} a_n$ et $l_b = \lim_{n \to +\infty} b_n$ alors

$b_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_b$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{l_a+l_b}{2}$.

Par unicité de la limite on a $l_b = \frac{l_a+l_b}{2}$ donc $2l_b = l_a + l_b$ donc $l_b = l_a$.

exo 13 :

Notons $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$, alors $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l - l = 0$. D'après le cours, cela signifie que :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \ |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ on a donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \geq N \quad -\frac{1}{2} \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}$.

Or par hypothèse (u_n) est à valeurs entières donc $u_{n+1} - u_n \in \mathbb{Z}$. Mais le seul entier compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ est 0 donc en fait :

$\forall n \geq N \quad u_{n+1} - u_n = 0$ càd $\forall n \geq N, \ u_{n+1} = u_n$.

Ainsi (u_n) est stationnaire.

exo 16 :

5) On a montré que (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc (u_n) converge. Notons $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \geq 1$ on a $l \geq 1$ donc $l > 0$ et on peut dire que $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2\sqrt{u_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1+l}{2\sqrt{l}}$

Or $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ donc par unicité de la limite $l = \frac{1+l}{2\sqrt{l}}$

donc $2l\sqrt{l} = 1 + l$ donc $(2l\sqrt{l})^2 = (1+l)^2$ donc

$4l^3 = l^2 + 2l + 1$ donc $4l^3 - l^2 - 2l - 1 = 0$. $(*)$

Il faut donc trouver les racines du polynôme (de degré 3 !) $P = 4X^3 - X^2 - 2X - 1$. L'astuce est de remarquer que 1 est racine de ce polynôme car on a vu précédemment que $f(1) = 1$. Ainsi il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$ ou encore $4X^3 - X^2 - 2X - 1 = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$ ce qui mène au système $\begin{cases} a = 4 \\ b - a = -1 \\ c - b = -2 \\ -c = -1 \end{cases}$ qui se résout en $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$. Ainsi

$P = (X-1)(4X^2 + 3X + 1)$. Comme le discriminant de $4X^2 + 3X + 1$ est $\Delta = 9 - 16 < 0$, P n'a pas d'autre racine réelle ! Ainsi la seule solution de $(*)$ est donc $l = 1$ et finalement $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.