Exercice 1
Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \tan(e^x)$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-1/x}$ $\quad \lim\limits_{x\to1} \exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to0^-} -3\ln(-x)-\dfrac{2}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-1}{x+1}$

Exercice 2
Etudier la limite en 0 des fonctions données par les expressions suivantes :

1. $f(x)=\begin{cases} x\ln x & \text{si } x>0 \\ e^x & \text{si } x\leq 0\end{cases}$
2. $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ 1-e^x & \text{si } x<0\end{cases}$
3. $h(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{1}{x}-\sqrt{-\dfrac{1}{x}} & \text{si } x<0\end{cases}$

Exercice 3
Pour $a,b\in\mathbb{R}$ on considère la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<1 \\ ax+b & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

1. Quelle condition doivent satisfaire a et b pour que f ait une limite en 1 ?
2. On suppose la condition précédente satisfaite. Quelle condition supplémentaire doivent satisfaire a et b pour que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ait une limite en 1 finie ? *On commencera par réécrire la définition de la fonction $g(x)$ en fonction de x.*

Exercice 4
Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+3x}{x^4-2x}$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x+x^3}{2^x}$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^2\ln x}$
3. $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+} xe^{1/x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-3x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}$

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire. On suppose que pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
En revenant à la définition de la limite, montrer que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 6

1. Montrer que la fonction $(x \mapsto \cos(\frac{1}{x}))$ n'a pas de limite en 0.
2. Etudier la limite de $(x \mapsto e^x \sin x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. *On pourra intuiter le résultat en traçant le graphe de cette fonction sur Geogebra :* ***`https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`***

Exercice 7
Le but de cet exercice est de démontrer le résultat de croissance comparée énoncé en cours :

$$\forall \alpha, \beta > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

On fixe $\alpha, \beta > 0$ et on considère un réel γ tel que $0 < \gamma < \dfrac{\alpha}{\beta}$.

1. Montrer que $\forall x \geq 1,\ \ln x \leq x$.
2. En déduire que $\forall x \geq 1,\ \ln x \leq \dfrac{x^\gamma}{\gamma}$.
3. En déduire un encadrement de $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ valable pour tout $x > 1$.
4. Conclure.

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée telle que

$$\forall x, y \geq 0,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est constante.

1. Justifier que f admet une limite finie L, en $+\infty$.
2. Montrer que $f(0) \leq L$.
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(0)}{2}$.
4. En déduire que $L \leq f(0)$.
5. Conclure.