**Devoir maison nº3**
**Corrigé**

# 1 Série harmonique

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0$ donc $(H_n)$ est croissante.

   (b) On a : $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Or pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ donc $H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{2n-(n+1)+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

   (c) Comme $(H_n)$ est croissante, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Si elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $H_{2n} - H_n \longrightarrow \ell - \ell = 0$ ; donc en passant à la limite dans $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ on trouve $0 \geq \frac{1}{2}$ ce qui est absurde. Ainsi $(H_n)$ diverge vers $+\infty$.

2. L'implication "$(u_n)$ converge $\Longrightarrow$ $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0" est vraie. En effet si $u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ alors $u_{n+1} \longrightarrow \ell$ et donc $u_{n+1} - u_n \longrightarrow \ell - \ell = 0$.
   En revanche l'implication "$(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0 $\Longrightarrow$ $(u_n)$ converge" est fausse. En effet, en prenant par exemple $u_n = H_n$ on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ mais $(u_n)$ ne converge pas.

3. (a) • Considérons $f : ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 1,\ f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Tout d'abord, $f$ est bien définie sur $]1, +\infty[$ car pour tout $x > 1$ on a bien $\frac{x+1}{x} > 0$ ; comme $x > 0$ et $x + 1 > 0$ on peut aussi écrire que

$$\forall x > 1,\ f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x).$$

La fonction $f$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions usuelles et on a :

$$\forall x > 1, f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{-(x+1) - x^2 + x(x+1)}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x^2(x+1)}$$

Ainsi on a $f' < 0$ sur $]1, +\infty[$ donc $f$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
Par ailleurs,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Comme $f$ est décroissante sur $]1,+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on a nécessairement $f$ positive sur $]1,+\infty[$ c'est-à-dire

$$\forall x > 1,\ \frac{1}{x} \geq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

- De même, soit $g :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 1,\ g(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x} = \ln(x) - \ln(x-1) - \frac{1}{x}$$

Comme pour tout $x > 1$ on a $x > 0$ et $x - 1 > 0$, $g$ est bien définie et dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a :

$$\forall x > 1,\ g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{x(x-1) - x^2 + x - 1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x^2(x-1)} < 0$$

donc $g$ est décroissante sur $]1,+\infty[$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

et par suite $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Comme précédemment, on en déduit que $g$ est positive sur $]1,+\infty[$ c'est-à-dire que

$$\forall x > 1,\ \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \geq \frac{1}{x}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant les inégalités précédentes pour $x = k \in [\![2,n]\!]$, et en rajoutant le terme 1 pour $k = 1$, on obtient :

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq H_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$$

Via les téléscopages $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(2)$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$, on obtient finalement l'encadrement suivant :

$$1 - \ln(2) + \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

(c) Pour tout $n > 1$ on a alors :

$$\frac{1 - \ln 2}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Écrivons alors $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ de sorte que

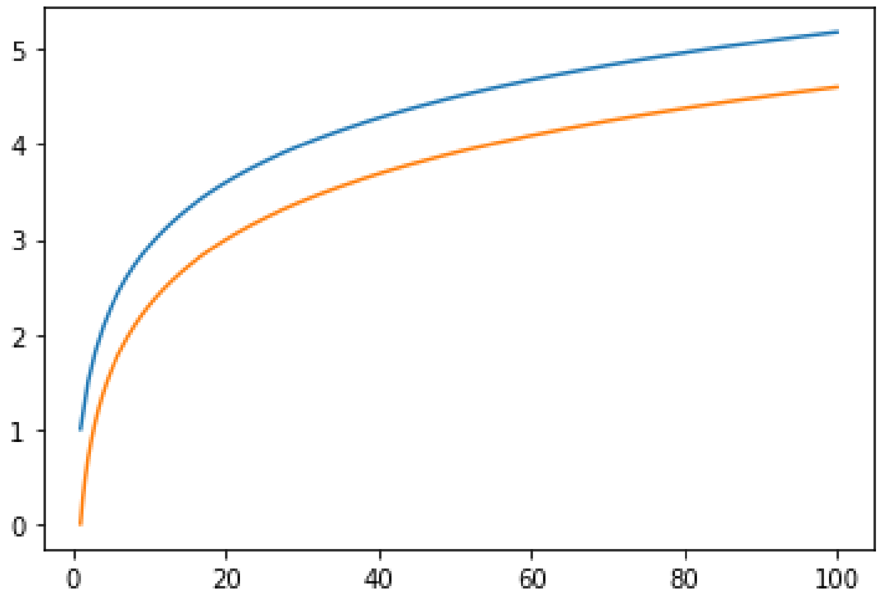
$\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}$. Dès lors, le fait que $\ln(1+\frac{1}{n}) \longrightarrow 0$ et $\ln n \longrightarrow +\infty$ donne $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \longrightarrow 1$ ; et finalement $\dfrac{1-\ln 2}{\ln n} + \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \longrightarrow 1$ et $\dfrac{1}{\ln n} + 1 \longrightarrow 1$. Par le théorème d'encadrement, on obtient $\dfrac{H_n}{\ln n} \longrightarrow 1$ i.e. $H_n \sim \ln n$.

4. (a)

```python
def harmonique(n):
    L_res = []
    s = 0
    for k in range(1,n+1):
        s += 1/k
        L_res.append(s)
    return L_res
```

(b)

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
N = 100
absi_suite = [k for k in range(1,N+1)]
ordo_suite = harmonique(N)
absi_fun = np.linspace(1,N,1000)
ordo_fun = np.log(absi_fun)
plt.plot(absi_suite, ordo_suite)
plt.plot(absi_fun, ordo_fun)
plt.show()
```



## 2 Suite logistique

1. (a) Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le coefficient dominant est strictement positif, et dont les racines sont $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Cette fonction admet donc un maximum en $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{1}{2}$ et ce maximum vaut $\dfrac{1}{2} \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. *On pouvait aussi faire l'étude de la fonction en dérivant.*

   (b) Soit $x \in [0,1]$. D'une part $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$ donc $x(1-x) \geq 0$ donc (comme $r \geq 0$) on a $f_r(x) = rx(1-x) \geq 0$. De plus on a vu à la question 1 que $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ donc (comme $r \leq 4$) on a $f_r(x) = rx(1-x) \leq 1$. Ainsi $f_r(x) \in [0,1]$ et finalement $f_r([0,1]) \subset [0,1]$.

   Déduisons-en par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$. Pour $n = 0$, c'est une hypothèse du modèle. Supposons ensuite que $u_n \in [0,1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors, comme $f_r([0,1]) \subset [0,1]$, cela implique que $f_r(u_n) \in [0,1]$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0,1]$ ce qu'il fallait démontrer.

2. Par continuité de la fonction $f_r$, si $(u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors on a $u_{n+1} = f_r(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_r(\ell)$. Or $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Donc par unicité de la limite on doit avoir $f_r(\ell) = \ell$. Or

$$\begin{aligned} f_r(\ell) = \ell \iff r\ell(1-\ell) = \ell &\iff \Big(\ell = 0 \ \text{ ou } \ r(1-\ell) = 1\Big) \\ &\iff \left(\ell = 0 \ \text{ ou } \ \ell = 1 - \frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

   Ainsi les limites possibles pour $(u_n)$ sont 0 et $1 - \dfrac{1}{r}$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(1-u_n)}{2} - u_n = -\dfrac{u_n(1+u_n)}{2}$. Or $u_n \geq 0$ donc $-\dfrac{u_n(1+u_n)}{2} \leq 0$. Ainsi $(u_n)$ est décroissante.

   (b) Comme $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0 elle converge. Notons $\ell$ sa limite ; d'après la question 1 on a $\ell = 0$ ou $\ell = 1 - \dfrac{1}{r} = 1 - \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = -1$. Or pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ donc on doit avoir $\ell \geq 0$. Ainsi cette deuxième valeur est rejetée et $(u_n)$ converge vers 0.

4. (a) On procède par récurrence. Pour $n = 0$ c'est une hypothèse de l'énoncé. Supposons que $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

   - $0 < 2u_n < 1$ et
   - $1 > 1 - u_n > 1 - \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} < 1 - u_n < 1$.

   En faisant le produit de ces deux inégalités (correct car tous les nombres en jeu sont positifs) on en déduit que $0 < 2u_n(1-u_n) < \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire que $0 < u_{n+1} < \dfrac{1}{2}$ ce qu'il fallait démontrer.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2(1-u_n) > 1$ car $u_n < \dfrac{1}{2}$ donc $1 - u_n > \dfrac{1}{2}$. Ainsi $(u_n)$ est croissante.

(c) La suite $(u_n)$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc converge. Notons $\ell$ sa limite. D'après la question 1 on a $\ell = 0$ ou $\ell = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Comme $(u_n)$ est croissante on a pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0$. En passant à la limite cela implique que $\ell \geq u_0 > 0$. Ainsi $\ell$ ne peut pas être égal à 0 et donc $\ell = \frac{1}{2}$. Finalement, la suite $(u_n)$ converge vers $\frac{1}{2}$.

5. (a) Montrons que l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ est stable par $f_r$, comme $u_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ cela impliquera par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$.
La fonction $f_r : x \longmapsto rx(1-x)$ est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ; ainsi si $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{8}$ alors $f_r\left(\frac{1}{2}\right) \geq f_r(x) \geq f_r\left(\frac{5}{8}\right)$. Or ici $r = \frac{5}{2}$, donc $f_r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4} = \frac{5}{8}$ ; et $f_r\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{75}{128} \geq \frac{1}{2}$ (car $2 \times 75 = 150 \geq 128$).
Ainsi, $f_r\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]\right) = \left[\frac{75}{128}, \frac{5}{8}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ ce qu'il fallait démontrer.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, en calculant la factorisation du trinôme du second degré correspondant on trouve que :

$$u_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{5}{2}u_n(1-u_n) - \frac{3}{5} = -\frac{5}{2}\left(u_n^2 - u_n + \frac{6}{25}\right) = -\frac{5}{2}\left(u_n - \frac{3}{5}\right)\left(u_n - \frac{2}{5}\right).$$

Or on sait que $u_n \geq \frac{1}{2} \geq \frac{2}{5}$ donc

$$\left|u_{n+1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{5}{2}\left(u_n - \frac{2}{5}\right)\left|u_n - \frac{3}{5}\right|$$

et comme $u_n \leq \frac{5}{8}$ on trouve finalement :

$$\left|u_{n+1} - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{5}{2}\left(\frac{5}{8} - \frac{2}{5}\right)\left|u_n - \frac{3}{5}\right| = \frac{9}{16}\left|u_n - \frac{3}{5}\right|.$$

(c) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - \frac{3}{5}\right| \leq \left(\frac{9}{16}\right)^n \left|u_0 - \frac{3}{5}\right|$.
Pour $n = 0$ cette inégalité s'écrit simplement $|u_0 - \frac{3}{5}| \leq |u_0 - \frac{3}{5}|$, elle est donc vraie.
Supposons que $\left|u_n - \frac{3}{5}\right| \leq \left(\frac{9}{16}\right)^n \left|u_0 - \frac{3}{5}\right|$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, grâce à la question $(c)$ cela implique que

$$\left|u_{n+1} - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{9}{16}\left|u_n - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{9}{16} \times \left(\frac{9}{16}\right)^n \left|u_0 - \frac{3}{5}\right| \leq \left(\frac{9}{16}\right)^{n+1} \left|u_0 - \frac{3}{5}\right|.$$

ce qu'il fallait démontrer.

(d) Or, comme $\left|\frac{9}{16}\right| < 1$, $\left(\frac{9}{16}\right)^n \longrightarrow 0$. Ainsi par théorème d'encadrement, $|u_n - \frac{3}{5}| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire que $u_n \longrightarrow \frac{3}{5}$.

6. Pour $r = 3,2$ on observe que la suite $(u_n)$ oscille entre deux valeurs : les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent mais vers des valeurs différentes.
Pour $r = 3,5$ on observe que la suite $(u_n)$ oscille entre quatre valeurs : les suites $(u_{4n})$, $(u_{4n+1})$, $(u_{4n+2})$ et $(u_{4n+3})$ convergent mais vers des valeurs différentes.
Pour $r = 3,8$ on observe que la suite $(u_n)$ ne semble plus suivre un schéma simple, son comportement est "chaotique".

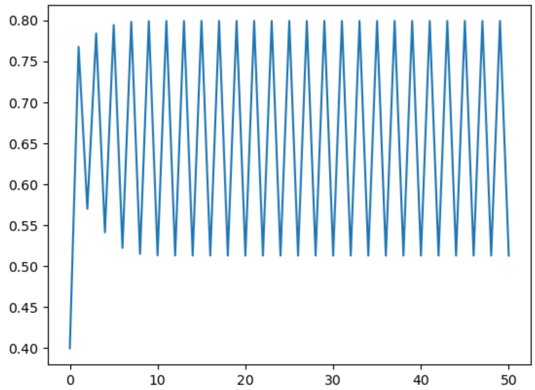



FIGURE 1 – la suite $(u_n)$ pour $r = 3,2$ et $u_0 = 0,4$

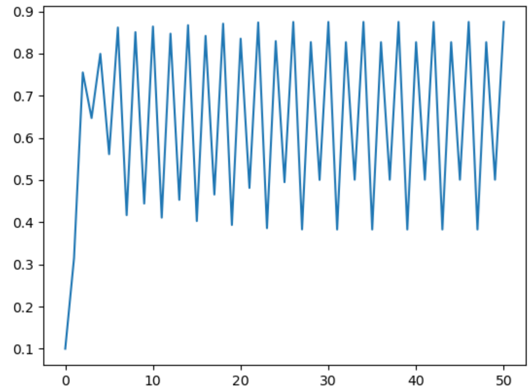



FIGURE 2 – la suite $(u_n)$ pour $r = 3,5$ et $u_0 = 0,1$

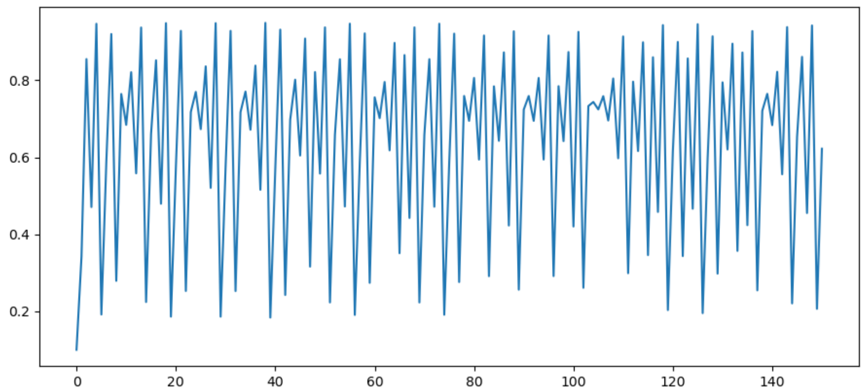



FIGURE 3 – la suite $(u_n)$ pour $r = 3,8$ et $u_0 = 0,1$