TD 11

exo 17 :

1) Il s'agit de montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n \neq -2$, en fait on peut montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>0$.
En effet par récurrence : $u_0=1>0$ et si $u_n>0$ alors $u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n+2}>0$.

2) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0$ donc $f \searrow$ sur $]-2,+\infty[$

3) On calcule :
$u_1=\dfrac{1}{u_0+2}=\dfrac{1}{3}$; $u_2=\dfrac{1}{u_1+2}=\dfrac{1}{\frac{7}{3}}=\dfrac{3}{7}$; $u_3=\dfrac{1}{u_2+2}=\dfrac{1}{\frac{17}{7}}=\dfrac{7}{17}\geqslant\dfrac{1}{3}$ car $21\geqslant 17$

Donc $a_1=u_2\leqslant u_0=a_0$ et $b_1=u_3\geqslant u_1=b_0$. Ainsi

• $\forall n\in\mathbb{N}\ a_{n+1}\leqslant a_n$: en effet $a_1\leqslant a_0$ et si $a_{n+1}\leqslant a_n$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$ alors $u_{2n+2}\leqslant u_{2n}$ donc (puisque $f\searrow$ sur $]-2,+\infty[$ et que u_{2n+2}, $u_{2n}\in\,]-2,+\infty[$) $f(u_{2n+2})\geqslant f(u_{2n})$ c.à.d $u_{2n+3}\geqslant u_{2n+1}$ donc $f(u_{2n+3})\leqslant f(u_{2n+1})$ c.à.d $u_{2n+4}\leqslant u_{2n+2}$ c.à.d $a_{n+2}\leqslant a_{n+1}$

• $\forall n\in\mathbb{N}\ b_{n+1}\geqslant b_n$: on peut refaire une récurrence ou remarquer que, puisque $f\searrow$, $a_{n+1}\leqslant a_n$ implique $f(a_{n+1})\geqslant f(a_n)$ c.à.d $f(u_{2n+2})\geqslant f(u_{2n})$ c.à.d $u_{2n+3}\geqslant u_{2n+1}$ c.à.d $b_{n+1}\geqslant b_n$.

4) Comme $a_{n+1}=f(f(a_n))$, si $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors, comme $l\geqslant 0$ (car $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\geqslant 0$) $f\circ f$ est continue en l donc $a_{n+1}=f(f(a_n))\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(f(l))$
Par unicité de la limite $l=f(f(l))$. On obtient donc :

$$l=f(f(l)) \iff l=\frac{1}{\frac{1}{l+2}+2} \iff \frac{1}{l}=\frac{1}{l+2}+2$$
$$\iff l+2=l+2l(l+2) \iff l(l+2)-1=0$$
$$\iff l^2+2l-1=0 \iff \left(l=\frac{-2+\sqrt{8}}{2}=-1+\sqrt{2} \text{ ou } l=-1-\sqrt{2}\right)$$

Or, on l'a vu, $l\geqslant 0$, donc la seule limite possible est $l=\sqrt{2}-1$.

5) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge et donc, d'après la question précédente $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sqrt{2}-1$. Cela implique que $f(a_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\sqrt{2}-1)$ c.à.d $b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{\sqrt{2}-1+2}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}-1$
Dès lors $a_n=u_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sqrt{2}-1$ et $b_n=u_{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sqrt{2}-1$. Donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sqrt{2}-1$.