TD 20 :

exo 8 :

1) Comme f est croissante et majorée, le théorème de la limite monotone montre qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$.

2) Comme f est croissante on a : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant f(0)$.
Faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient alors $L \geqslant f(0)$.

3) Il suffit de prendre $y=0$ dans la propriété satisfaite par f

4) Comme pour tout $x \geqslant 0$, $f\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(0)}{2}$, en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient (puisque $\frac{x}{2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$) $L \leqslant \frac{L+f(0)}{2}$
donc $2L \leqslant L + f(0)$ donc $L \leqslant f(0)$

5) Ainsi $f(0) \leqslant L \leqslant f(0)$ donc $f(0) = L$. Cela va impliquer que f est la fonction constante à L. En effet, soit $a \in \mathbb{R}^+$; pour tout $x \geqslant a$, on a - puisque f est croissante -

$$0 \leqslant a \leqslant x \implies f(0) \leqslant f(a) \leqslant f(x)$$

Faisant tendre x vers $+\infty$ on en déduit que $f(0) \leqslant f(a) \leqslant L$
Or $L = f(0)$ donc $L \leqslant f(a) \leqslant L$ donc $f(a) = L$.
Ainsi pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $f(a) = L$: f est constante.