# Remédiation 12

ex 1 :

1) $\frac{4}{3}>1$ donc $\left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et $-1<-\frac{3}{5}<1$ donc $\left(-\frac{3}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2) $1+e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3) $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(0)+\sin(0)+\tan(0)=1$

4) $\ln(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

5) $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\ln(1-\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^-$ car $1-\frac{1}{n}<1$ donc $\ln(1-\frac{1}{n})<0$

Ainsi $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

ex 2 :

1) comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. De m̂ $\sin\left(\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$. Donc $u_n \sim \frac{1/n}{2/n} = 2$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

2) $v_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)$. Comme $\frac{3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a $\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ donc

$n\ln(1+\frac{3}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3$ càd $n\ln(1+\frac{3}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$ donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^3$.

3) $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1/n^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 2$ donc $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

4) $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

5) $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1+\frac{1}{n}}-1$. Ainsi

$y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{e^{1/n}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ (comme en 4)) donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

ex 3 :

1) $\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \dfrac{\ln\left(v_n \frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = \dfrac{\ln(v_n)+\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si de plus $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou $+\infty$ alors

$\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ ou $+\infty$ et donc $\ln(u_n/v_n)/\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par suite $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$

2) Prendre par exemple $u_n = 1+\frac{1}{n}$ et $v_n = 1+\frac{1}{n^2}$.