Exercice 1
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition puis justifier par une phrase qu'elle est continue sur cet ensemble.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} + 2e^x$
2. $g : x \longmapsto \sqrt{x}\ln(x)$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{x^4-1}{3+2x+x^2}$
4. $u : x \longmapsto \sqrt{1+|x|}$
5. $v : x \longmapsto \sqrt{1-\ln(x)}$
6. $w : x \longmapsto \ln(2+\cos(x))$

Exercice 2
Déterminer le plus grand ensemble sur lequel les fonctions suivantes sont continues, puis préciser si elles sont prolongeables par continuité aux bords de cet ensemble.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$
2. $k : x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$
3. $h : x \longmapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est constante.
2. Étudier la limite de (u_n).
3. Conclure que f est constante.

Exercice 4

1. Montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique est bornée.
2. Montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ continue et admettant une limite finie en $+\infty$ est bornée.

Exercice 5

1. Les fonctions suivantes sont-elles continues en x_0 ?

   (a) $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2+2x-6 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$.

   (b) $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(|x|)} & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{0,1,-1\} \end{cases}$ en $x_0 \in \{0,1,-1\}$.

2. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis montrer qu'elles sont prolongeables par continuité en x_0.

   (a) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-9}{x+3}$ en $x_0 = 3$.

   (b) $g : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ en $x_0 = 0$.

   (c) $h : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ en $x_0 = 1$.

   (d) $u : x \longmapsto (x-2)\ln(x^2-4)$ en $x_0 = 2$.

Exercice 6
Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
3. Déterminer f^{-1}.

Exercice 7

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = e^x.$$

   Montrer que $f = \exp$ ou $f = -\exp$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g(x)^2.$$

   Montrer que g est constante.

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = x^2 + \ln(x).$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x + x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation

$$(E_n)\ :\ f(x) = n.$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera x_n.
2. Déterminer le sens de variation de (x_n).
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln n \geq x_n \geq \ln(n - \ln n).$$
4. En déduire la limite de (x_n) puis montrer que $\dfrac{x_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 10
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < 1$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_{n+1}) < 0$.
4. En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}.$$
6. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 11
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution $v_n \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 < v_n < \frac{1}{n}.$$
3. Qu'en déduit-on sur (v_n) ?
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, v_n$.

Exercice 12
Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction *contractante*, c'est-à-dire telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

On considère la suite (x_n) définie par la donnée de $x_0 \in [0,1]$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que f est continue.

On admet tout d'abord que la fonction f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $x^* \in [0,1]$ tel que $f(x^*) = x^*$.

2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|.$$
Qu'en déduit-on sur la suite (x_n) ?

On souhaite maintenant montrer qu'un tel point fixe existe. Pour cela on considère la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\forall x \in [0,1],\ g(x) = |f(x) - x|$.

3. Justifier qu'il existe $m \in [0,1]$ tel que : $\forall x \in [0,1],\ g(x) \geq g(m)$.
4. Montrer que si $g(m) > 0$ alors $g(f(m)) < g(m)$.
5. Conclure que f admet un point fixe.
6. Montrer que ce point fixe est unique.