
Mathématiques - mercredi 6 mars 2024
Devoir nº6 Durée : 3 h 30 min

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet est constitué de 5 exercices indépendants.**
- **Les copies sales seront particulièrement pénalisées.**

Exercice 1 (calculs de limites)**.** *Les questions ci-dessous sont indépendantes.*

1. Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque $n \to +\infty$:
   (a) $u_n = \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
   (b) $v_n = \dfrac{n^2 \sin(n)}{n^3+1}$
   (c) $w_n = \left(\dfrac{1+n}{n}\right)^n$
2. Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x\, e^{-1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 2 (étude d'inversibilité)**.** Dans tout l'exerice, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On propose d'étudier l'inversibilité de A de trois manières différentes. *Les trois parties ci-dessous sont donc indépendantes.*

Partie 1 : rang

1. Calculer le rang de A.
2. En déduire que A est inversible.

Partie 2 : polynôme annulateur

3. Montrer que $A^2 - 4A + 3I_3 = 0_3$.
4. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Partie 3 : diagonalisation

On introduit la matrice $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse selon la méthode du pivot de Gauss.
6. Calculer la matrice $D = PAP^{-1}$.
7. Justifier que la matrice D est inversible et donner D^{-1}.
8. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3 (comme dans le cours)**.** Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ donnée par :

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}.$$

Démontrer que (a_n) converge en montrant que les suites $(u_n) = (a_{2n})$ et $(v_n) = (a_{2n+1})$ sont adjacentes.

Exercice 4 (une première suite récurrente)**.** Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2}.$$

1. Montrer que (u_n) est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Si (u_n) converge quelle(s) valeur(s) peut prendre sa limite ?
4. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 5 (une deuxième suite récurrente)**.**
Partie A : Un équivalent, L'Hôpital et Cesàro
Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
2. On <u>admet</u> le théorème suivant, dit "règle de L'Hôpital" :

   Théorème : *Soit $\ell \in \mathbb{R}$, et soient $f,\ g :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ et $g' \neq 0$ sur $]0,1[$.*

   $$\textit{Si } \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \ \textit{ alors } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

   En utilisant la règle de L'Hôpital, montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$.
3. On <u>admet</u> le théorème suivant, dit "théorème de Cesàro en 0" :

   Théorème : *Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ une suite réelle, et soit la suite (y_n) donnée par :*

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

   En utilisant le théorème de Cesàro en 0, montrer que si $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est une suite convergeant vers un réel ℓ alors la suite (y_n) donnée par

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

   converge aussi vers ℓ. *On introduira la suite $(a_n) = (x_n - \ell)$.*

Partie B : étude d'une suite récurrente
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction arctan.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
6. Déterminer le sens de variation de (u_n).
7. Montrer que (u_n) converge.
8. En étudiant la fonction $f : x \longmapsto \arctan(x) - x$, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Dans la suite de l'exercice on cherche un équivalent de (u_n). On introduit la suite (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}.$$

9. En utilisant la question 1, montrer que $\arctan(u_n) + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$.
10. En utilisant la question 2, en déduire en équivalent de x_n, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\dfrac{2}{3}$.
11. En utilisant la question 3, en déduire un équivalent de u_{n+1}^2.
12. Conclure en déterminant un équivalent simple de u_n.
13. *Question bonus. Cette question difficile ne sera corrigée que si toutes les autres questions sont traitées proprement.* Démontrer le "théorème de Cesàro en 0" en revenant à la définition avec des quantificateurs d'une limite. *On écrira que* $|y_n| \leq \dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=N}^{n} |x_k|$ *pour un N bien choisi, puis on majorera séparément chacun des deux termes.*