
Mathématiques - mercredi 6 mars 2024
Devoir n°6 Corrigé

Exercice 1 (calculs de limites). *Les questions ci-dessous sont indépendantes.*

1. Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque $n \to +\infty$:
   (a) $u_n = \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
   (b) $v_n = \dfrac{n^2 \sin(n)}{n^3+1}$
   (c) $w_n = \left(\dfrac{1+n}{n}\right)^n$
2. Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x\, e^{-1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Solution :

1. (a) On a $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\ln(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$
   (b) On a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc (puisque $\dfrac{n^2}{n^3+1} > 0$) $-\dfrac{n^2}{1+n^3} \leq v_n \leq \dfrac{n^2}{1+n^3}$. Or $\dfrac{n^2}{1+n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par le théorème d'encadrement $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$
   (c) On a $w_n = \left(\dfrac{1}{n}+1\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 = e.}$
2. Tout d'abord, par croissances comparées, $x^2\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

   Ensuite, pour $x < 0$ on a $xe^{-1/x} = -\dfrac{e^{-1/x}}{-1/x}$. Or $-\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{e^y}{y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées, donc $\dfrac{e^{-1/x}}{-1/x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'a pas de limite en } 0.}$

Exercice 2 (étude d'inversibilité)**.** Dans tout l'exerice, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On propose d'étudier l'inversibilité de A de trois manières différentes. *Les trois parties ci-dessous sont donc indépendantes.*

Partie 1 : rang

1. Calculer le rang de A.
2. En déduire que A est inversible.

Partie 2 : polynôme annulateur

3. Montrer que $A^2 - 4A + 3I_3 = 0_3$.
4. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Partie 3 : diagonalisation

On introduit la matrice $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse selon la méthode du pivot de Gauss.
6. Calculer la matrice $D = PAP^{-1}$.
7. Justifier que la matrice D est inversible et donner D^{-1}.
8. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Solution :

1. On sait d'après le cours que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

   Finalement $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 3.}$ *On pouvait aussi échelonner la matrice A, mais c'était bien plus long !*

2. Comme $\mathrm{rg}(A) = 3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

3. On obtient par le calcul $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -24 & -8 & 1 \end{pmatrix} = 4A - 3I_3$. On a donc $\boxed{A^2 - 4A + 3I_3 = 0_3.}$

4. On a $A^2 - 4A + 3I_3 = 0_3$ donc $A^2 - 4A = -3I_3$ donc $A(A - 4I_3) = -3I_3 = (A - 4I_3)A$ donc en divisant par -3 on obtient $A \times \left(\frac{1}{3}(4I_3 - A)\right) = I_3 = \left(\frac{1}{3}(4I_3 - A)\right) \times A$. On en déduit que A est inversible et que

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}(4I_3 - A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}.$$

5. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss. Soient X et $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
PX = Y \Leftrightarrow PX = I_3Y &\iff \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} Y \quad (L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1) \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} Y \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} Y \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \qquad (*) \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} Y \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} Y \quad (L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1)
\end{aligned}$$

A l'étape $(*)$ on peut lire que $\text{rg}(P) = 3$ donc $\boxed{P \text{ est inversible.}}$ Et comme $PX = Y$ se résout en $X = P^{-1}Y$ on a donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.}$

6. On trouve $PA = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{D = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$

7. Comme D est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont non nuls, $\boxed{D \text{ est inversible}}$ et $\boxed{D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.}$

8. Comme $D = PAP^{-1}$ on a $P^{-1}DP = A$. Dès lors, comme P^{-1}, D et P sont inversibles, A est inversible en tant que produit de matrices inversibles. Et

$$A^{-1} = (P^{-1}DP)^{-1} = P^{-1}D^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}D^{-1}P.$$

On calcule alors $P^{-1}D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ -2 & 1 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ et on retrouve finalement que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ -2 & 1 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.}$

Exercice 3 (comme dans le cours)**.** Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ donnée par :

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}.$$

Démontrer que (a_n) converge en montrant que les suites $(u_n) = (a_{2n})$ et $(v_n) = (a_{2n+1})$ sont adjacentes.

Solution :
Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

- (u_n) est décroissante : en effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = a_{2n+2} - a_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\alpha} \\ &= \frac{1}{(2n+2)^\alpha} - \frac{1}{(2n+1)^\alpha} < 0 \end{aligned}$$

  car $2n+2 > 2n+1$ donc (puisque $\alpha > 0$), $(2n+2)^\alpha > (2n+1)^\alpha$ donc $\dfrac{1}{(2n+2)^\alpha} < \dfrac{1}{(2n+1)^\alpha}$.

- (v_n) est croissante : de même, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = a_{2n+3} - a_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)^\alpha} \\ &= -\frac{1}{(2n+3)^\alpha} + \frac{1}{(2n+2)^\alpha} > 0 \end{aligned}$$

  car $2n+3 > 2n+2$ donc (puisque $\alpha > 0$), $(2n+3)^\alpha > (2n+2)^\alpha$ donc $\dfrac{1}{(2n+3)^\alpha} < \dfrac{1}{(2n+2)^\alpha}$.

- $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: en effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n - v_n = a_{2n} - a_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\alpha} = \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  car $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\alpha > 0$.

Dès lors, les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, elles convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc $a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$: ainsi la suite (a_n) converge.

Exercice 4 (une première suite récurrente)**.** Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2}.$$

1. Montrer que (u_n) est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Si (u_n) converge quelle(s) valeur(s) peut prendre sa limite ?
4. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Solution :

1. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n + u_n^2 \geq 0$. Pour cela, montrons en fait par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
   Tout d'abord, $u_0 = 1 \geq 0$. Ensuite, supposons que $u_n \geq 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2} \geq 0$ ce qu'il fallait démontrer. $\boxed{\text{Ainsi } (u_n) \text{ est bien définie.}}$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 0$ donc $u_n + u_n^2 \geq u_n^2$ donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2} \geq \sqrt{u_n^2}$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$. $\boxed{\text{Ainsi } (u_n) \text{ est croissante.}}$
3. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ on a $\ell \geq 0$; ainsi $\ell + \ell^2 \geq 0$. Ainsi on peut dire que $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\ell + \ell^2}$. Or $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc par unicité de la limite $\ell = \sqrt{\ell + \ell^2}$. Or pour $\ell \geq 0$ on a :

   $$\ell = \sqrt{\ell + \ell^2} \iff \ell^2 = \ell + \ell^2 \iff \ell = 0.$$

   Finalement, $\boxed{\text{si } (u_n) \text{ converge alors sa limite vaut } 0.}$
4. Comme (u_n) est croissante, soit elle converge soit elle tend vers $+\infty$. Par l'absurde, supposons que (u_n) converge. D'après la question 3 on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or (u_n) est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0$ c'est-à-dire $u_n \geq 1$. En passant à la limite dans cette inégalité on obtient donc $0 \geq 1$ ce qui est faux. Ainsi (u_n) ne peut pas converger et finalement, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

Exercice 5 (une deuxième suite récurrente)**.**

Partie A : Un équivalent, L'Hôpital et Cesàro

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
2. On <u>admet</u> le théorème suivant, dit "règle de L'Hôpital" :

   Théorème : *Soit $\ell \in \mathbb{R}$, et soient $f,\ g :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 0$ et $g' \neq 0$ sur $]0,1[$.*

   $$\textit{Si } \lim_{x\to0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \textit{alors } \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

   En utilisant la règle de L'Hôpital, montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\arctan(x)-x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$.
3. On <u>admet</u> le théorème suivant, dit "théorème de Cesàro en 0" :

   Théorème : *Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ une suite réelle, et soit la suite (y_n) donnée par :*

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

   En utilisant le théorème de Cesàro en 0, montrer que si $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est une suite convergeant vers un réel ℓ alors la suite (y_n) donnée par

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

   converge aussi vers ℓ. *On introduira la suite $(a_n) = (x_n - \ell)$.*

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction arctan.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
6. Déterminer le sens de variation de (u_n).
7. Montrer que (u_n) converge.
8. En étudiant la fonction $f : x \longmapsto \arctan(x) - x$, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Dans la suite de l'exercice on cherche un équivalent de (u_n). On introduit la suite (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}.$$

9. En utilisant la question 1, montrer que $\arctan(u_n) + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$.
10. En utilisant la question 2, en déduire en équivalent de x_n, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\dfrac{2}{3}$.
11. En utilisant la question 3, en déduire un équivalent de u_{n+1}^2.
12. Conclure en déterminant un équivalent simple de u_n.

13. *Question bonus. Cette question difficile ne sera corrigée que si toutes les autres questions sont traitées proprement.* Démontrer le "théorème de Cesàro en 0" en revenant à la définition avec des quantificateurs d'une limite. *On écrira que* $|y_n| \leq \dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=N}^{n} |x_k|$ *pour un* N *bien choisi, puis on majorera séparément chacun des deux termes.*

Solution :

1. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que la fonction arctan est continue en 0, on a $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \arctan(0) = 0$. Or le cours donne que si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\tan(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. On a donc
$$\tan(\arctan(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \arctan(u_n)$$
Comme $\tan(\arctan(u_n)) = u_n$ on a finalement $\boxed{\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.}$

2. Considérons les fonctions $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :
$$f : x \longmapsto \arctan(x) - x \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto x^3$$
Les fonctions f et g sont dérivables sur $]0,1]$, vérifient $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \arctan(0) - 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 0^3 = 0$ et pour tout $x \in]0,1]$:
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 \quad \text{et} \quad g'(x) = 3x^2 \neq 0.$$
On calcule alors que
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\dfrac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \frac{1-(1+x^2)}{3(1+x^2)x^2} = \frac{-1}{3(1+x^2)} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$
Ainsi par la règle de L'Hôpital, on a :
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}.$$
Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\arctan(x) - x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}.}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons $a_n = x_n - \ell$. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de Cesàro en 0, la suite (b_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$
vérifie donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \ell) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell \\ &= y_n - \frac{1}{n} \times n\ell \\ &= y_n - \ell \end{aligned}$$
Ainsi $y_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.}$

4. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$. Ainsi arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$. On obtient finalement le tableau de variations suivant dans lequel on place, à titre indicatif, que $\arctan(0) = 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

5. Prouvons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
Tout d'abord, $u_1 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
Supposons ensuite que $u_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, puisque la fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cela implique que $\arctan(u_n) > \arctan(0)$ c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$ ce qu'il fallait démontrer.

6. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$ En effet, démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} \leq u_n$.
Tout d'abord, $u_2 = \arctan(u_1) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} \leq 1 = u_1$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n = 1$.
Supposons ensuite que $u_{n+1} \leq u_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de la fonction arctan cela implique que $\arctan(u_{n+1}) \leq \arctan(u_n)$ c'est-à-dire que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ce qu'il fallait démontrer.

7. La suite (u_n) est décroissante d'après la question 6 et minorée par 0 d'après la question 5. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

8. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de (u_n). Comme la fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$, on a $u_{n+1} = \arctan(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \arctan(\ell)$. Or $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc par unicité de la limite $\arctan(\ell) = \ell$.
On cherche donc à déterminer quels sont les réels ℓ tels que $\arctan(\ell) = \ell$, ou en encore tels que $f(\ell) = 0$ où f est la fonction définie par $f : x \longmapsto \arctan(x) - x$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0.$$
Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
On remarque par ailleurs que $f(0) = \arctan(0) - 0 = 0$. Dès lors par stricte décroissance de f :
   - pour tout $x > 0$, on a $f(x) < f(0)$ i.e. $f(x) < 0$,
   - et pour tout $x < 0$, on a $f(x) > f(0)$ i.e. $f(x) > 0$.

   Ainsi pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$. (On pouvait aussi dire que puisque f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ elle est injective, donc 0 ne peut avoir qu'un seul antécédant par f.)
Finalement $\ell = 0$ est l'unique solution de l'équation $f(\ell) = 0$ i.e. l'unique limite possible de (u_n). Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.}$

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\arctan(u_n) + u_n}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\arctan(u_n)}{u_n} + 1\right).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc d'après la question 1, $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\arctan(u_n)}{u_n} = 1$.

Par somme puis produit de limites, on obtient donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(u_n) + u_n}{2u_n} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

c'est-à-dire que $\boxed{\arctan(u_n) + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n.}$ *(Attention ici à ne pas avoir sommé les équivalents !)*

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2} \\ &= \frac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} \\ &= \frac{\arctan^2(u_n) - u_n^2}{u_n^2 \arctan^2(u_n)} \\ &= \frac{(\arctan(u_n) - u_n)(\arctan(u_n) + u_n)}{u_n^2 \arctan^2(u_n)}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\arctan(u_n) + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$, et aussi $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Par produits d'équivalents on en déduit que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\arctan(u_n) - u_n)\, 2u_n}{u_n^2 \times u_n^2},$$

et donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{\arctan(u_n) - u_n}{u_n^3}\right).$$

Pour conclure, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, on peut utiliser la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$ de la question 2 pour dire que

$$\frac{\arctan(u_n) - u_n}{u_n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad \frac{\arctan(u_n) - u_n}{u_n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3}.$$

Finalement $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{3}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\dfrac{2}{3}.}$

11. D'après la question 3, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\dfrac{2}{3}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k+1}^2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k^2} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{u_k^2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}\right) \qquad \text{(par téléscopage)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n\, u_{n+1}^2} \end{aligned}$$

Dès lors, il vient :

$$\frac{1}{n\,u_{n+1}^2} = \frac{1}{n} - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

donc $\dfrac{1}{n\,u_{n+1}^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3}$ et donc $u_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n}$.

12. On a vu que $\arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ i.e. $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

    On a donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n}$.

    En élevant à la puissance $\dfrac{1}{2}$, on trouve finalement : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{2n}}.}$

13. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.

    Démontrons que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* \ :\ \forall n \geq N,\ |y_n| \leq \varepsilon.$$

    Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition avec des quantificateurs de $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dès lors pour $n \geq N$ on écrit, grâce à l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned} |y_n| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} x_k\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} x_k\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |x_k|\,. \end{aligned}$$

    L'entier N étant fixé, le terme de gauche tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$: $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} x_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

    Par ailleurs, dans le terme de droite on sait que pour tout $k \geq N$ on a $|x_k| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=N}^{n} |x_k| \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon(n-N+1)}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $n - N + 1 \geq n$ car $N \geq 1$.

    Posons alors $N_2 = \max(N, N_1)$. Pour tout $n \geq N_2$ les deux majorations précédentes s'appliquent et on a donc $|y_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. On a donc bien démontré que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.