Matrices TP11

Exercice 1 Créations de matrices grâce aux fonctions de numpy

Q1 Dans le script, créer un tableau A1 de dimension 2×3 correspondant à la matrice $A1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Q2 Dans la console, après avoir vérifié ce que contient la variable A1, modifier A1 pour qu'elle contienne la matrice $\begin{pmatrix} 20 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ et vérifier le résultat.

Q3 Prédire ce que contiennent les matrices B1 à B5 après exécution du programme suivant. Vérifier au fur et à mesure en recopiant les lignes ci-dessous une par une.

```
B1 = np.eye(5)
B2 = np.diag([4,2,7,1,2])
B3 = 2*B1 - B2
B4 = 5*np.ones((2,3))
B5 = B4 + np.zeros((3,2))
```

Q4 A l'aide des fonctions usuelles, créer rapidement les matrices suivantes.

$$C1 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}, C2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Autour de la taille

On n'oubliera pas de tester les fonctions créées.

Q1 Écrire une fonction `carree` prenant en argument une matrice `A` et renvoyant `True` si elle est carrée et `False` sinon.

Q2 Écrire une fonction `size_prod` prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant la taille du produit AB (c'est-à-dire le couple donnant son nombre de lignes et son nombre de colonnes). Votre fonction devra renvoyer un message d'erreur si le produit AB n'est pas faisable.

Q3 Écrire une fonction `top_plus` prenant en arguments une matrice `A` et un nombre `x` qui renvoie `A` après avoir ajouté `x` à son coefficient en haut à gauche. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors `top_plus(A,10)` doit renvoyer $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Q4 Écrire une fonction `bottom_plus` prenant en arguments une matrice `A` et un nombre `x` qui renvoie `A` après avoir ajouté `x` à son coefficient en bas à droite. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors `bottom_plus(A,10)` doit renvoyer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 16 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Parcours

Q1 Écrire une fonction `compte` prenant en argument une matrice A et renvoyant le nombre de coefficients nuls de A.

Q2 Écrire une fonction `trace` prenant en argument une matrice carrée A et renvoyant sa trace, c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ alors `trace(A)` doit renvoyer $1 + 5 + 9 = 15$.

Exercice 4 Création de matrices depuis la matrice nulle

Q1 Écrire une fonction `topleft` prenant en argument un entier naturel non nul `n` et renvoyant une matrice carrée de taille `n` dont les coefficients sont nuls sauf celui en haut à gauche qui vaut 1. Par exemple, `topleft(4)` doit renvoyer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q2 Écrire une fonction `topright` prenant en argument un entier naturel non nul `n` et renvoyant une matrice carrée de taille `n` dont les coefficients sont nuls sauf celui en haut à droite qui vaut 1. Par exemple, `topright(4)` doit renvoyer :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q3 Écrire une fonction `repete` prenant en argument une liste `L` de n nombres réels ainsi qu'un entier $p \in \mathbb{N}^*$, et renvoyant une matrice à n lignes et p colonnes dont la i-ème ligne est la répétition du i-ème élément de `L`. Par exemple, si `L = [3,0,5]` alors `repete(L,4)` doit renvoyer :

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Agréable inflation

Pour évaluer l'inflation, on sélectionne une liste de produits dans un magasin et on note leurs prix de vente une première fois en janvier 2023 et une deuxième fois en janvier 2024. On stocke les résultats dans un tableau `prix` où chaque colonne correspond à un produit et où la première ligne indique les prix en janvier 2023 et la deuxième les prix en janvier 2024.

Q1 Écrire une fonction `inflation` prenant en argument un prix x et un prix y et renvoyant le pourcentage d'augmentation entre x et y. Par exemple, `inflation(10,12)` doit renvoyer 20 car passer de 10 euros à 12 euros correspond à une augmentation de 20%.

Q2 Écrire une fonction `list_inflation` prenant en argument le tableau contenant les prix relevés en 2023 et en 2024 et renvoyant la liste des pourcentages d'augmentation des prix des articles sélectionnés. On vérifiera par exemple que si `prix` $= \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 & 4 \\ 12 & 7{,}5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ alors `list_inflation(prix)` renvoie `[20,50,100,-25]`.

Pour estimer l'inflation globale, on peut envisager deux méthodes de calcul.

Q3 La première méthode consiste à faire la moyenne des pourcentages d'augmentation de chacun des articles sélectionnés. Écrire une fonction `inflation_1` prenant en argument le tableau `prix` et renvoyant l'inflation calculée selon cette méthode.

Q4 La deuxième méthode consiste à calculer le pourcentage d'augmentation du total du panier, c'est-à-dire de la somme des prix des articles sélectionnés. Écrire une fonction `inflation_2` prenant en argument le tableau `prix` et renvoyant l'inflation claculée selon cette méthode.

Les deux méthodes mènent-elles au même résultat ? Laquelle vous semble la plus réaliste ?

Exercice 6 Avec des booléens

Q1 Dans la console, définissez une matrice A de votre choix. Que renvoie la commande `A == A` ?

Q2 Dans la console, définissez une matrice B de taille différente de A. Que renvoie la commande `A == B` ?

Q3 Écrire une fonction `egal` prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant `True` si $A = B$ et `False` sinon.

Exercice 7 Matrices stochastiques

En mathématique, une matrice est dite stochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et que la somme de ses coefficients sur chaque ligne vaut 1. Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ est stochastique. Une matrice est dite bistochastique lorsqu'elle est stochastique et que la somme des coefficients sur chacune de ses colonnes fait aussi 1. Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$ est bistochastique.

Q1 Écrire une fonction testant si tous les coefficients d'une matrice sont positifs.

Q2 Écrire une fonction testant si une matrice est stochastique.

Q3 Écrire une fonction testant si une matrice est bistochastique.

On note U_p la matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. On a vu en DS qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs est stochastique si et seulement si $AU_p = U_n$. De même, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs est bistochastique si et seulement si $AU_n = A^T U_n = U_n$. On rappelle que la commande `np.dot(A,B)` effectue le produit matriciel de A par B, et que la commande `np.transpose(A)` renvoie la transposée de A.

Q4 À l'aide de la commande `np.dot`, écrire à nouveau une fonction testant si une matrice est stochastique, et une fonction testant si une matrice est bistochastique.

Exercice 8 Inversion

Q1 Écrire une fonction `determinant` calculant le déterminant d'une matrice carrée de taille 2.

Q2 Écrire une fonction `inverse` prenant en entrée une matrice carrée de taille 2 et renvoyant son inverse. La fonction devra gérer le cas où la matrice n'est pas inversible.

Q3 Testez votre fonction précédente à l'aide de la commande `np.dot(A,B)` réalisant le produit matriciel AB.

Q4 Écrire une fonction `echange` prenant en arguments une matrice `A` et deux indices `i1` et `i2` et renvoyant la matrice où les lignes `i1` et `i2` de `A` ont été échangées.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ alors `echange(A,0,2)` doit renvoyer la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Q5 En utilisant la méthode du pivot de Gauss, écrire une fonction décidant si une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible.