TD 21

exo 5 :

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique.
Soit $T > 0$ une période de f c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$
Comme f est continue, elle est bornée sur le segment $[0,T]$: il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [0,T]$, $|f(x)| \leq M$.
Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque il existe $y \in [0,T]$ tel que $f(x) = f(y)$ car f est T-périodique.
(Il s'agit en fait de $y = x - nT$ où $n = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$. En effet, on a :
$n \leq \frac{x}{T} < n+1$ donc $nT \leq x < nT + T$ donc $0 \leq x - nT < T$
donc $y \in [0,T[$ et par T-périodicité de f, $f(y) = f(x-nT) = f(x-nT+nT) = f(x)$)
Ainsi f est bien bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$.
Alors on a : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(x \geq M \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$
Prenons $\varepsilon = 1$, alors pour un certain $M \in \mathbb{R}$ on sait que pour tout $x \geq M$,
$|f(x) - l| \leq 1$ donc $-1 \leq f(x) - l \leq 1$ donc $l - 1 \leq f(x) \leq l + 1$
Sans perte de généralité, on peut supposer que $M \geq 0$, et la fonction f est donc bornée sur $[M, +\infty[$.
Par ailleurs, f est continue sur le segment $[0,M]$ donc y est bornée : il existe $b, B \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in [0,M]$, $b \leq f(x) \leq B$.
Posons alors $k = \min(b, l-1)$ et $K = \max(B, l+1)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $k \leq f(x) \leq K$. En effet, si $x \geq M$ alors $k \leq l-1 \leq f(x) \leq l+1 \leq K$,
et si $x \leq M$ alors $k \leq b \leq f(x) \leq B \leq K$.
Ainsi f est bien bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Indications exo 10

1) On pourra consulter le cours ou, pour s'entraîner, utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité.
2) On procédera par récurrence en faisant apparaître judicieusement $f(x^*) = x^*$.