TD 13 : exo 12

1) Soit $x \in [0,1]$, montrons que f est continue en x, c'est-à-dire que $f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x)$

On sait que pour $y \in [0,1]$ on a :

$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ donc $-k|x-y| \leq f(x) - f(y) \leq k|x-y|$

avec $k|x-y| \xrightarrow[y \to x]{} 0$. Donc par th. d'encadrement $f(x) - f(y) \xrightarrow[y \to x]{} 0$

càd $f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x)$.

2) Par récurrence. Pour $n=0$ c'est clair et si $|x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors : comme $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x^* = f(x^*)$,

$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| \leq k|x_n - x^*| \underset{H.R.}{\leq} k\, k^n |x_0 - x^*| \leq k^{n+1} |x_0 - x^*|$

Comme $0 \leq k < 1$ on a $k^n |x_0 - x^*| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où par th. d'encadrement

$|x_n - x^*| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^*$.

3) g est continue sur $[0,1]$ comme différence et composée de fonctions continues. Ainsi g admet un minimum sur $[0,1]$: $\exists m \in [0,1]$ tq $\forall x \in [0,1]$ $g(x) \geq g(m)$.

4) On a $g(f(m)) = |f(f(m)) - f(m)| \leq k|f(m) - m|$

càd $g(f(m)) \leq k\,g(m)$. Ainsi, si $g(m) \neq 0$, comme $0 \leq k < 1$

on a $k\,g(m) < g(m)$ et donc $g(f(m)) < g(m)$.

5) Ceci contredit la définition de m. On doit donc avoir $g(m) = 0$ (car $g \geq 0$) càd $|f(m) - m| = 0$ càd $f(m) = m$.

6) Par l'absurde si $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$ avec $x_1 \neq x_2$ alors $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ donne $|x_1 - x_2| \leq k|x_1 - x_2|$ avec $|x_1 - x_2| > 0$ donc $1 \leq k$ ce qui contredit que $k \in]0,1[$.

Ainsi le point fixe de f est unique.