TD 14

exo 7 : 1) $\binom{N}{k}$

2) $\binom{N-k}{k}$

3) $\binom{k}{1}\binom{N-k}{k-1}$

4) $\binom{k}{2}\binom{N-k}{k-2}$

5) $\binom{k}{p}\binom{N-k}{k-p}$

6) Soient $E = \{$ ttes les grilles $\}$, $A = \{$ grilles avec au moins 1 bon numéro $\}$ et $A_p = \{$ grilles avec exact^t p bons numéros $\}$. On a

- $A = E \setminus A_0$ donc $Card(A) = Card(E) - Card(A_0) = \binom{N}{k} - \binom{N-k}{k}$
- $A = \bigcup_{p=1}^{k} A_p$ et l'union est disjointe (aka : $(A_1, \dots, A_k)$ est une partition de A)

donc $Card(A) = \sum_{p=1}^{k} Card(A_p) = \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p}\binom{N-k}{k-p}$

Ainsi, par double décompte, $\binom{N}{k} - \binom{N-k}{k} = \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p}\binom{N-k}{k-p}$

ou encore $\binom{N}{k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}\binom{N-k}{k-p}$.

---

exo 8 : 1) Comme (E_1, E_2) est une partit$^{\circ}$ de E : $Card(E) = Card(E_1) + Card(E_2)$ c.à.d $n = n_1 + n_2$

2) $\binom{n}{k}$

3) On choisit i éléments dans E_1 ($\binom{n_1}{i}$ possibilités) puis $k-i$ éléments dans E_2 ($\binom{n_2}{k-i}$ possibilités) donc il y a $\binom{n_1}{i} \times \binom{n_2}{k-i}$ tels ensembles

4) Les $P_{i,k}$ pour $i \in [\![0, k]\!]$ forment une partition de P_k.

Donc $Card(P_k) = \sum_{i=0}^{k} Card(P_{i,k})$ c.à.d $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}$

ou encore, puisque $n_2 = n - n_1$: $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n-n_1}{k-i} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n_1}{p}\binom{n-n_1}{k-p}$

n.b : la formule de l'exo 7 est un cas particulier de celle-ci avec $n_1 = k$.