Exercice 1
Un dé à 6 faces est truqué de sorte que le 6 sorte deux fois plus souvent que chacune des 5 autres faces qui sortent, elles, avec des probabilités égales. Calculer la probabilité que le résultat du lancer de ce dé soit pair. *On introduira des notations appropriées à l'exercice.*

Exercice 2
Un code de cadenas se compose de 3 chiffres compris entre 0 et 6. On choisit au hasard un code.

1. Quelle est la probabilité que tous les chiffres du code soient impairs ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un chiffre du code soit impair ?

Exercice 3
On lance un dé rouge et un dé bleu et on s'intéresse à la somme des deux dés.

1. Quel univers considérer pour disposer d'une situation d'équiprobabilité ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ?
3. On suppose maintenant que les deux dés sont indiscernables (par exemple, tous les deux rouges). On propose de modéliser la situation par l'univers Ω contenant : les 2-combinaisons de $[\![1, 6]\!]$ (pour les cas où les deux dés ne font pas le même résultat) et les singletons $\{k\}$ pour $k \in [\![1, 6]\!]$ (pour les cas où les deux dés font le même résultat). Est-ce une situation d'équiprobabilité ? Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 dans ce cas ?

Exercice 4
Quelle est la probabilité que dans un groupe de N personnes, deux au moins aient la même date d'anniversaire ? On considèrera que les années comptent toutes 365 jours et que les dates de naissances des personnes sont équiprobables. Intuitivement, à combien estimez-vous cette probabilité lorsque $N = 44$? Comparez votre intuition au résultat exact donné par la formule précédente.

Exercice 5
Une urne contient 4 boules jaunes, 5 boules rouges et 6 boules vertes. On tire 3 boules dans l'urne successivement et sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. dans cet ordre, une boule rouge, une verte puis une jaune ?
2. trois boules de même couleur ?
3. au moins deux boules de couleurs différentes ?

Exercice 6
Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes. On tire *simultanément* 2 boules dans l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir les deux boules vertes ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?

Exercice 7
Un questionnaire à choix multiple propose une question où m réponses sont proposées et 1 seule est juste. Un étudiant a une probabilité p de connaître la réponse à la question. S'il ne la connaît pas, il répond au hasard. Quelle est la probabilité que l'étudiant connaisse effectivement la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ? Commentez votre réponse lorsque $m \to +\infty$, lorsque $p \to 1$, lorsque $p \to 0$.

Exercice 8
Une compagnie aérienne étudie la réservation des places sur l'un de ses vols. Elle a calculé que :

- si une place est réservée au jour k alors elle le sera encore au jour $k+1$ avec probabilité $\dfrac{9}{10}$;
- si une place est disponible au jour k alors elle sera réservée au jour $k+1$ avec probabilité $\dfrac{4}{10}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note R_k l'évènement "la place est réservée au jour k" et $p_k = \mathbb{P}(R_k)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que $p_{k+1} = \dfrac{1}{2}p_k + \dfrac{2}{5}$.
2. En déduire l'expression de p_k en fonction de k.

Exercice 9
Dans un jeu vidéo, il y a deux ennemis à affronter successivement. On suppose que :

- On a une chance sur 2 de gagner contre le premier ennemi.
- Si on a gagné contre le premier ennemi, alors on a une chance sur 4 de gagner contre le deuxième.
- Si on a perdu contre le premier ennemi, alors on a une chance sur 2 de gagner contre le deuxième.

Le jeu est réussi si on a gagné contre au moins un de deux ennemis. On note A_1 (resp. A_2) l'évènement "on gagne contre le premier (resp. le deuxième) ennemi".

1. Déterminer la probabilité de gagner contre les deux ennemis.
2. Déterminer la probabilité de gagner contre le deuxième ennemi.
3. Déterminer la probabilité de réussir le niveau.

Exercice 10
Un groupe d'éléphants se déplace tous les ans entre trois zones d'habitat distinctes : la zone A, la zone B et la zone C. À l'année $n = 0$, les éléphants sont dans la zone A. Puis chaque année $n \in \mathbb{N}$ ils changent ou non d'habitat pour l'année $n+1$ de la manière suivante :

- ils restent dans la zone où ils sont avec probabilité $\dfrac{1}{2}$,
- ils se déplacent de la zone où ils sont pour aller dans une des deux autres zones avec probabilité $\dfrac{1}{4}$ pour chaque zone.

On note a_n la probabilité de l'évènement A_n : "les éléphants sont dans la zone A à l'année n". On note similairement b_n et c_n les probabilités des évènements B_n et C_n. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que valent a_0, b_0, c_0 ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. Déterminer une matrice M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{4}MX_n$, puis vérifier que $M^2 = 5M - 4I_3$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \dfrac{4^n - 1}{3}M - \dfrac{4^n - 4}{3}I_3$.
5. Déterminer l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0.
6. Conclure.

Exercice 11
On dispose de trois urnes numérotées de 0 à 2 :

- l'urne 0 contient 1 boule blanche et 3 boules noires,
- l'urne 1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires,
- l'urne 2 contient 3 boules blanches et 1 boule noire.

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite, puis on tire une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de "Pile" obtenu.
On introduira les évènements appropriés, et on indiquera quelle formule du cours on utilise.

1. Quelle est la probabilité de choisir l'urne 2, i.e. d'avoir obtenu 2 fois "Pile" ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant qu'on a choisi l'urne 2 ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
4. Déterminer la probabilité d'avoir choisie l'urne 2 sachant que la boule qu'on a tirée est blanche.

Exercice 12
Deux traitements différents, que nous appelerons A et B, sont proposés pour soigner des calculs rénaux. Voici le nombre de patients ayant reçu un des deux traitements en fonction de la taille de leurs calculs et du succès du traitement :

	petits calculs (total = 357)		gros calculs (total = 343)	
	traitement A (total = 87)	traitement B (total = 270)	traitement A (total = 263)	traitement B (total = 80)
nombre de succès	81	234	192	55
nombre d'échecs	6	36	71	25

On cherche à savoir quel est le meilleur traitement. On notera respectivement P, A et S les évènements "les calculs sont petits", "le traitement A a été administré" et "le traitement a été un succès". Ainsi les évènements $\overline{P}$, $\overline{A}$ et $\overline{S}$ sont respectivement "les calculs sont gros", "le traitement B a été administré" et "le traitement a été un échec". On exprimera les probabilités demandées en pourcentages arrondis à l'unité.

1. On choisit au hasard un patient. Déterminer $\mathbb{P}(P)$, $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(P\cap A)$. Le traitement choisi est-il indépendant de la taille des calculs ?
2. On choisit au hasard un patient atteint de petits calculs. Quelle est la probabilité qu'il soit soigné avec le traitement A ? À quelle probabilité conditionnelle cela correspond-il ?
3. On choisit au hasard un patient atteint de petits calculs et ayant reçu le traitement A. Quelle est la probabilité que le traitement ait été un succès ? À quelle probabilité conditionnelle cela correspond-il ?
4. On choisit au hasard un patient atteint de gros calculs. Quelle est la probabilité que son traitement ait été un succès sachant qu'il a reçu le traitement A ?
5. Calculer $\mathbb{P}_{P\cap\overline{A}}(S)$ et $\mathbb{P}_{\overline{P}\cap\overline{A}}(S)$.
6. D'après les questions précédentes quelle est le meilleur traitement ?
7. Montrer que pourtant $\mathbb{P}_A(S) < \mathbb{P}_{\overline{A}}(S)$. Comment expliquer ce paradoxe ?