
Devoir maison n°4

À rendre le vendredi 29 mars

Une copie pour 2 élèves obligatoirement

Exercice 1 (la guêpe qui se prenait pour un éléphant).

Une guêpe est entrée par la fenêtre d'une chambre donnant sur un bureau. Les portes du bureau étant fermées, son seul moyen de ressortir est de repasser par la fenêtre de la chambre. À l'instant initial $n = 0$, la guêpe est dans la chambre ; puis son comportement suit les règles suivantes pour tout instant $n \in \mathbb{N}$:

- si elle est dans la chambre à l'instant n, alors à l'instant $n+1$: elle reste dans la chambre avec une probabilité $1/2$, elle passe dans le bureau avec une probabilité $1/4$, et elle ressort par la fenêtre avec une probabilité $1/4$,
- si elle est dans le bureau à l'instant n, alors à l'instant $n+1$: elle reste dans le bureau avec une probabilité $1/3$, et elle retourne dans la chambre avec une probabilité $2/3$,
- enfin, si elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note les évènements :

- C_n : "la guêpe est dans la chambre à l'instant n",
- B_n : "la guêpe est dans le bureau à l'instant n", et
- D_n : "la guêpe est dehors à l'instant n".

On note enfin $c_n = \mathbb{P}(C_n),\ b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $d_n = \mathbb{P}(D_n)$.

1. D'après l'énoncé, quelles sont les valeurs de $c_0,\ b_0$ et d_0 ? les valeurs de $c_1,\ b_1$ et d_1 ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $c_{n+1},\ b_{n+1}$ et d_{n+1} en fonction de $c_n,\ b_n$ et d_n.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = 2\, b_n$.
4. En déduire l'expression de c_n et b_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = 1 - \dfrac{9}{10} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
6. Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$? Interpréter.

Exercice 2 (le basketteur autour du monde).

Lors d'un entraînement de basket, un joueur effectue successivement 4 tirs en reculant à chaque fois d'un mètre entre chaque tir.

On suppose qu'il est initialement à 1 mètre du panier, et que la probabilité p_k qu'il marque lorsqu'il est à k mètres du panier vaut :

$$p_k = \frac{2}{2k+1}.$$

1. Quelle est la probabilité qu'il réussisse tous ses tirs ?
2. Quelle est la probabilité qu'il réussisse tous ses tirs sauf le troisième ?
3. Quelle est la probabilité qu'il réussisse tous ses tirs sauf un ?