
Devoir maison n°4
Corrigé

Exercice 1 (la guêpe qui se prenait pour un éléphant)**.** *Le titre de l'exercice était là pour vous faire penser à l'exercice du TD 15 sur le groupe d'éléphants. La situation est la même dans les deux exercices, on parle de "chaîne de Markov".*

1. Comme la guêpe est initialement dans la chambre on a $c_0 = 1$ et $b_0 = d_0 = 0$. Et par suite $c_1 = 1/2$, $b_1 = 1/4$ et $d_1 = 1/4$.
2. Dans le système complet d'évènements (C_n, B_n, D_n), la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{D_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{2} \times c_n + \frac{2}{3} \times b_n + 0 \times d_n \\ b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{4} \times c_n + \frac{1}{3} \times b_n + 0 \times d_n \\ d_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1}) &= \mathbb{P}_{C_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{B_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{D_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{4} \times c_n + 0 \times b_n + 1 \times d_n \end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\begin{cases} c_{n+1} &= \frac{1}{2}c_n + \frac{2}{3}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{3}b_n \\ d_{n+1} &= \frac{1}{4}c_n + d_n \end{cases}$

3. On peut procéder par récurrence ou bien remarquer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire d'après la question précédente (puisque $n - 1 \in \mathbb{N}$) :

$$2b_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}c_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1}\right) = \frac{1}{2}c_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} = c_n.$$

4. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a d'après les questions 3 et 4 :

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{2}{3}b_n = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{3}c_n = \frac{5}{6}c_n.$$

   Donc $(c_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $c_1 = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = c_1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

   et donc

$$b_n = \frac{1}{2}c_n = \frac{3}{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

   Attention comme la suite (c_n) est géométrique seulement à partir du rang $n = 1$, il faut appliquer la formule $c_n = c_p \times (raison)^{n-p}$ avec $p = 1$ (et non pas $c_n = c_0 \times (raison)^n$ qu'on obtiendrait avec $p = 0$).

5. Comme (C_n, B_n, D_n) est un système complet d'évènements, on a $c_n + b_n + d_n = 1$ donc
$$d_n = 1 - c_n - b_n = 1 - \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{3}{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \frac{9}{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n .$$

6. Comme $-1 < \frac{5}{6} < 1$ on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} d_n = 1$. Ainsi, il est *presque sûr* que la guêpe retrouve la sortie au bout d'un moment.

   Le vocabulaire "presque sûr", à première vue peu mathématique, est en fait le vocabulaire correct pour désigner un évènement dont la probabilité est 1. Ici il s'agit de l'évènement $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$: "la guêpe sort au bout d'un moment". Notons que cela ne signifie pas que la guêpe ne puisse pas rester indéfiniment à l'intérieur, mais seulement que la probabilité que cela se produise est nulle...

Exercice 2 (le basketteur autour du monde)**.**
On commence par noter, pour $k \in [\![1, 4]\!]$ l'évènement M_k : "le joueur marque à son k-ème tir".
Attention, l'évènement M = "le joueur marque" est beaucoup trop imprécis pour décrire l'expérience.

1. On cherche la probabilité de l'évènement $S = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4$. Comme les tirs sont mutuellement indépendants :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}(M_2) \times \mathbb{P}(M_3) \times \mathbb{P}(M_4)\\ &= p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{945}.\end{aligned}$$

   Attention à ne pas passer outre l'étape consistant à écrire l'évènement A en fonction des M_k. Écrire uniquement "par indépendance $\mathbb{P}(A) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4$" ne rapportera pas l'entièreté des points. En effet, il faut mettre en avant le fait que vous savez que l'indépendance se traduit par le fait que la probabilité d'une intersection est le produit des probabilités.

   Ici on a précisé que les tirs étaient indépendants <u>mutuellement</u> parce que c'est l'hypothèse minimale dont on a besoin. On peut aussi dire que les tirs sont indépendants <u>deux à deux</u>. Parler simplement, comme on le fait ensuite, d'indépendance des tirs sera également accepté.

2. On cherche la probabilité de l'évènement $B = M_1 \cap M_2 \cap \overline{M_3} \cap M_4$. Similairement, l'indépendance des tirs donne :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap \overline{M_3} \cap M_4) &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}(M_2) \times \mathbb{P}(\overline{M_3}) \times \mathbb{P}(M_4)\\ &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}(M_2) \times (1 - \mathbb{P}(M_3)) \times \mathbb{P}(M_4)\\ &= p_1 \times p_2 \times (1 - p_3) \times p_4\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{189}\end{aligned}$$

3. L'évènement A = "il marque à tous les tirs sauf un" s'écrit sous la forme
$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$
   avec
$$A_1 = \overline{M_1} \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \quad , \quad A_2 = M_1 \cap \overline{M_2} \cap M_3 \cap M_4$$
$$A_3 = M_1 \cap M_2 \cap \overline{M_3} \cap M_4 \quad , \quad A_4 = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M_4}.$$

Comme précédemment l'indépendance des tirs donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(\overline{M_1}) \times \mathbb{P}(M_2) \times \mathbb{P}(M_3) \times \mathbb{P}(M_4) = (1-p_1) \times p_2 \times p_3 \times p_4 \\
\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}(\overline{M_2}) \times \mathbb{P}(M_3) \times \mathbb{P}(M_4) = p_1 \times (1-p_2) \times p_3 \times p_4 \\
\mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}(M_2) \times \mathbb{P}(\overline{M_3}) \times \mathbb{P}(M_4) = p_1 \times p_2 \times (1-p_3) \times p_4 \\
\mathbb{P}(A_4) &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}(M_2) \times \mathbb{P}(M_3) \times \mathbb{P}(\overline{M_4}) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times (1-p_4).
\end{aligned}$$

Enfin, comme les évènements A_i sont à deux à deux incompatibles (par exemple : $A_1 \cap A_2 = (\overline{M_1} \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) \cap (M_1 \cap \overline{M_2} \cap M_3 \cap M_4) = (M_1 \cap \overline{M_1}) \cap (M_2 \cap \overline{M_2}) \cap M_3 \cap M_4 = \emptyset$), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\
&= (1-p_1)p_2p_3p_4 + p_1(1-p_2)p_3p_4 + p_1p_2(1-p_3)p_4 + p_1p_2p_3(1-p_4) \\
&= p_2p_3p_4 + p_1p_3p_4 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_3 - 4p_1p_2p_3p_4 \\
&= p_1p_2p_3p_4 \times \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} - 4\right) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \frac{9}{2} - 4\right) \\
&= \frac{16}{945} \times \frac{16}{2} \\
&= \frac{128}{945}
\end{aligned}$$

Pensez à mentionner le fait que les évènements sont <u>deux à deux</u> incompatibles pour pouvoir écrire que la probabilité de leur union vaut la somme de leurs probabilités.