Exercice 13
Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire successivement 4 boules dans l'urne, et on note B_k l'évènement "la k-ème boule tirée est blanche". On s'intéresse à l'évènement A : "toutes les boules tirées sont blanches sauf la dernière".

1. Exprimer A à l'aide des B_k.
2. Dans cette question on suppose que le tirage a été fait *avec remise*. Déterminer la probabilité de A. On précisera quelle hypothèse sur les évènements B_k on a utilisé.
3. Dans cette question on suppose que le tirage a été fait *sans remise*. Déterminer la probabilité de A. On précisera quelle formule du cours on a utilisé.

Exercice 14
1. Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles, montrer que :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})}{\mathbb{P}(B)}$$

2. Un objet fabriqué dans une usine peut avoir deux défauts : le défaut a et le défaut b. Au sortir de la chaîne de production, 20% des objets ont le défaut a et 30% ont le défaut b. De plus, 10% des objets n'ayant pas le défaut b ont le défaut a.
   (a) Calculer la probabilité qu'un objet ayant le défaut b ait le défaut a.
   (b) Les évènements "avoir le défaut a" et "avoir le défaut b" sont-ils indépendants ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'un objet sorte de la chaîne de production sans défaut ?

Exercice 15
Un archer dispose de deux cibles, une à 20 mètres et une à 50 mètres. Il effectue trois tirs successifs et doit changer de cible à chaque nouveau tir. On suppose que les trois tirs sont indépendants et qu'il a une probabilité p d'atteindre la cible à 20 mètres, et q d'atteindre celle à 50 mètres, avec $p > q$. Il parie avec ses amis qu'il peut atteindre deux cibles de suite. Pour maximiser ses chances de gagner son pari, doit-il commencer par viser la cible à 20 mètres ou celle à 50 mètres ?

Exercice 16
On dispose de n dés à 6 faces dont k sont truqués. Pour ces dés truqués, le 6 a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'apparaître, et les autres faces sont équiprobables. Vous choisissez un dé parmi les n et le lancez m fois. Vous obtenez à chaque fois le résultat 6 ("c'est louche !"). Quelle est la probabilité que le dé que vous avez choisi soit truqué ?

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 1 boule noire et $n-1$ boules blanches. On effectue successivement n tirages d'une boule avec remise. Déterminer la probabilité p_n que la boule noire ne sorte à aucun tirage. Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 18

On souhaite envoyer un message informatique constitué de 2 bits, c'est-à-dire se présentant sous la forme d'une liste `[A,B]` dont les éléments `A` et `B` ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

Pour atteindre le destinataire final, le message est relayé successivement par des intermédiaires qui recopient le message qu'ils reçoivent avant de le renvoyer à l'intermédiaire suivant. Chacun des bits `A` et `B` peut alors être mal recopié, et ce indépendamment de l'autre bit. On suppose que, à chaque étape de recopie :

- un bit 0 peut être transformé en 1 avec probabilité $p \in]0,1[$,
- un bit 1 peut être transformé en 0 avec probabilité $q \in]0,1[$.

Par exemple, si le message initial est `[0,1]` alors il peut devenir successivement `[0,0]` puis `[0,0]` puis `[1,1]` : dans ce cas, la première étape n'a modifié que le bit `B`, la deuxième étape n'a modifié aucun des bits, et la troisième étape a modifié les deux bits.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note les évènements suivants :
A_n : "le bit `A` contient 0 à l'étape n"
B_n : "le bit `B` contient 0 à l'étape n".

On note enfin $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

Partie 0 (préliminaire).

0. Démontrer la proposition $(*)$ ci-dessous :

Proposition $(*)$ **:** Soient A, A', B et B' des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On suppose que A et B sont indépendants, et que $A \cap A'$ et $B \cap B'$ sont indépendants. Alors $\mathbb{P}_{A\cap B}(A' \cap B') = \mathbb{P}_A(A') \times \mathbb{P}_B(B')$.

Partie 1. Dans cette partie, on s'intéresse uniquement au devenir du bit `A`.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = (1-p-q)a_n + q$.
2. En déduire l'expression de a_n en fonction de n, p, q et de a_0.
3. On rappelle que $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{q}{p+q}$.
4. On suppose dans cette question que $p > q$. Après un très grand nombre d'étapes, est-il plus probable que le bit `A` contienne un 0 ou un 1 ?

On note p_n (respectivement p'_n) la probabilité que le bit `A` ait été correctement transmis après n étapes lorsque ce bit était intialement un 0 (respectivement un 1).

5. Écrire p_n et p'_n comme des probabilités conditionnelles faisant intervenir les évènements A_k pour certaines valeurs de k.
6. Déterminer les expressions de p_n et de p'_n à partir de celle de a_n.

Le raisonnement mené sur le bit `A` s'applique également au bit `B`. Ainsi p_n (respectivement p'_n) est aussi la probabilité que le bit `B` soit correctement transmis dans le cas où il contient initialement un 0 (respectivement un 1).

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on s'intéresse au message reçu après n étapes.

On rappelle que les erreurs de recopie affectent indépendamment les bits `A` et `B`.

Partie 2. Dans cette partie, on suppose que le message intial est `[0,1]`.

On exprimera les probabilités demandées en fonction de p_n et de p'_n.

7. En utilisant la proposition $(*)$ (partie 0), déterminer quelle est la probabilité que le message reçu à la n-ème étape soit le bon.
8. Quelle est la probabilité que le message reçu à la n-ème étape contienne exactement une erreur ?

Partie 3. Dans cette partie, on suppose que le message initial est choisi au hasard parmi tous les messages possibles.

On exprimera les réponses en fonction de p, q et n .

9. Dans le message reçu à la n-ème étape, le bit `A` vaut 0. Quelle est la probabilité que ce bit soit bien celui dans le message initial ?
10. On a reçu le message `[0,1]`. Quelle est la probabilité pour que ce soit le message initial ? *On utilisera à nouveau la proposition* $(*)$.