Comment calculer une intégrale ?
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f c'est-à-dire que $F' = f$.

Exercice 1 (premiers exemples)
Il faut connaître des primitives des fonctions simples (polynômes, exponentielle, cosinus, sinus). Pour cela, il faut "lire à l'envers" le tableau donné dans la feuille de cours sur les dérivées usuelles.

- $\displaystyle\int_0^5 e^t\,dt = \Big[\qquad\Big]_0^5 =$ car $F(t) =$ vérifie $F'(t) =$
- $\displaystyle\int_0^1 t\,dt = \Big[\qquad\Big]_0^1 =$ car $F(t) =$ vérifie $F'(t) =$
- $\displaystyle\int_{-2}^3 5\,dt = \Big[\qquad\Big] =$ car $F(t) =$ vérifie $F'(t) =$
- $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t)\,dt = \Big[\qquad\qquad\Big] =$ car $F(t) =$ vérifie $F'(t) =$
- $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt = \Big[\qquad\qquad\Big] =$ car $F(t) =$ vérifie $F'(t) =$

Exercice 2 (par linéarité)
Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt.$$

Ainsi, si $F' = f$ et $G' = g$ sur $[a, b]$ alors on peut écrire au choix :

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,dt = \begin{cases} \Big[F(t) + \lambda G(t)\Big]_a^b = \\ \text{ou} \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b + \lambda \Big[G(t)\Big]_a^b = \end{cases}$$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 2t + 1\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^2 t^2\,dt$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 2e^t - 4t^3\,dt$
4. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(t) - \sin(t)\,dt$
5. $\displaystyle\int_0^1 1 + t^{10}\,dt$

Exercice 3 (en $F(c\,t+d)$)
Soient $c, d \in \mathbb{R}$ des constantes fixées, avec $c \neq 0$.
Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si F est telle que $F' = f$ sur $\mathbb{R}$, alors en posant

$$G(t) = F(c\,t+d) \quad \text{on a} \quad G'(t) =$$

donc pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(c\,t+d)\,dt = \Big[\qquad\qquad\qquad \Big]_a^b =$$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 e^{2t+1}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \sin(2\pi t)\,dt$
3. $\displaystyle\int_{-2}^2 e^{-\frac{t}{2}}\,dt$
4. (sans développer le carré) $\displaystyle\int_{-1}^1 3(1+2t)^2\,dt$
5. $\displaystyle\int_1^3 (1-3t)^3\,dt$

Exercice 4 (mais qui est la variable ?)
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 t^2 x\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^2 t^2 x\,dx$
3. $\displaystyle\int_{T_0}^{T_1} e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt$
4. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega t+\varphi)\,dt$
5. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\omega x+\varphi)\,d\varphi$

Exercice 5 (pour s'entraîner)
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 6t^5\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 t^7\,dt$
3. $\displaystyle\int_{-2}^1 e^{2t} - t\,dt$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 2\cos(\pi x) + x^2\,dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 (1-x)^{10}\,dx$
6. $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^{-2s+1}\,ds$