Exercice 1

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E.
   (a) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y + 3z = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$
   (b) $F_2 = \{(t+s+2r, s-r), \ t,s,r \in \mathbb{R}\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
   (c) $F_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x + y - z + 3t = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^4$
   (d) $F_4 = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ A^T = A\}$ avec $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   (e) $F_5 = \{f \in E \ : \ \int_0^1 f = 0\}$ où E est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$

2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E ? Justifier.
   (a) $G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + y = x + 2y\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
   (b) $G_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x + y - 2z + 1 = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$
   (c) $G_3 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \ a,b \in \mathbb{R}\}$ avec $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   (d) $G_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq y\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
   (e) $G_5 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que f est paire$\}$ avec $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 2

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoiel sous-jacent et en donner une famille génératrice :

1. $F_1 = \{(x-y, x+2y), \ x,y \in \mathbb{R}\}$
2. $F_2 = \{(x+2y, x-z, z+y+2x), \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$
3. $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y - 3z = 0\}$
4. $F_4 = \{\begin{pmatrix} x & x+y \\ -y & y \end{pmatrix}, \ x,y \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3

1. Démontrer que $E = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ y(2) = y(-1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. On note $f : x \longmapsto x^2 - x$, $g : x \longmapsto \cos((x-2)(x+1))$ et $h : x \longmapsto 7$.
   On note $F = Vect(f,g,h)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par ces 3 fonctions.
   Démontrer que $F \subset E$.

Exercice 4 (familles génératrices)

1. Montrer que $\big((0,1,2),(1,0,2),(2,1,0)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(t+s-r, t+r, s), \ t,s,r \in \mathbb{R}\}$.
3. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - 2z = x + y = 0\}$.

Exercice 5 (familles libres)

1. Montrer que $\big((0,1,2),(1,0,2),(2,1,0)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que (A, B, C) est une famille libre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\big((1,3,-1),(2,0,1),(0,6,-3)\big)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

1. Soient $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.
2. Montrer que la famille $\big((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.
3. Montrer que la famille $\big((1,i,-i),(i,0,-1),(1,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.

Exercice 7

1. Soit $F_1 = \{(t+s-r, 2t-3s-r, 3t-7s-r)\ ,\ t,s,r \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Déterminer une famille génératrice de F.
   (b) Cette famille est-elle une base de F ?
   (c) Déterminer une base de F formée de vecteurs de cette famille.
2. Mêmes questions avec
   $F_2 = \{(2a+b+2d, 2a+2b+2c+d, 4a-4c+d, 2a+b),\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$.
3. Mêmes questions avec $F_3 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ où
   $u_1 = (2,-1,-1)$, $u_2 = (-1,2,3)$, $u_3 = (1,4,7)$ et $u_4 = (1,1,2)$.

Exercice 8

Soient $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ x-y+z-t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ x = y\}$.

1. Donner une base et la dimension de E.
2. Donner une base et la dimension de F.
3. Donner une base et la dimension de $E \cap F$.

Exercice 9

1. Déterminer une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille 2).

Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille n).
3. Déterminer une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille n).