Remarques DS 6

Un DS plutôt décevant dans l'ensemble. Si on peut regretter que la fonction arctan soit si peu connue [1], c'est surtout l'exercice sur les matrices qui laisse à désirer. Les matrices sont un point important du programme de BCPST, qu'il sera bon de réviser. D'autant que des calculs matriciels apparaissent naturellement dans le contexte des probabilités et de l'algèbre linéaire, chapitres 15 et 16, au programme du DS 7...

Remarques importantes :

- Les remarques faites aux DS et aux DM précédents doivent être prises en compte :
  - comme signalé au DS 5, il serait temps de penser à préciser "$\forall n \in \mathbb{N}$" ou "$\forall n \in \mathbb{N}^*$" en annonce des récurrences.
  - comme signalé dans de nombreuses copies du DM 3, l'expression "par unicité de la limite" ne sert pas à justifier que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, voire l'erreur $\boxed{\text{PUL}}$.
  - comme signalé au DS 1, il est très fortement conseillé de se relire.

  Et si on relisait toutes les feuilles de remarques [2] ? Ce n'est pas si long que ça, et ça occupe un trajet en RER. Elles sont ici :

  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/docs?rep=168`

- Beaucoup de copies écrivent "D est diagonale donc inversible" : c'est faux et choquant ! Par exemple, la matrice nulle est diagonale, pourtant on ne peut pas faire moins inversible ! Pour rappel, le théorème du cours est le suivant :
  Soit $D = diag(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1, \ldots, a_n$. Si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \neq 0$ alors D est inversible et $D^{-1} = diag(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n})$.
  Il faut bien mentionner que les coefficients diagonaux sont non nuls.
- Trop peu de copies semblent avoir compris ce qu'on fait lorsqu'on présente un calcul d'inverse de matrice par la méthode du pivot de Gauss. Pour inverser $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on résout en fait le système linéaire $PX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et de second membre quelconque $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (X et Y sont donc des matrices colonnes, pas carrées). On présente souvent ces calculs sous forme matricielle, mais il s'agit bien d'une résolution d'un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues. Si P est bien inversible, alors ce système admet une unique solution $X = P^{-1}Y$, ce qui nous permet d'identifier P^{-1}.
- Seules certaines limites très précises (dont la liste a été donnée en cours) sont appelées "croissances comparées". Dire "par croissances comparées" devant n'importe quelle forme indéterminée où vous pressentez qu'un terme l'emporte sur l'autre n'est donc pas satisfaisant. Par ailleurs, la notation $f(x) \underset{x\to a}{>>} g(x)$ signifie $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ et non pas "devant une forme indéterminée impliquant $f(x)$ et $g(x)$ c'est "$f(x)$ qui gagne" ". Par exemple, la croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ ne s'écrit pas $x \underset{x\to 0}{>>} \ln(x)$.

1. Peut-être le serait-elle plus si elle réapparaissait au DS 7 ?
2. Que ceux qui ne lisent pas mes remarques y soient incités par cette remarque !

Remarques particulières :

- Un théorème s'accompagne généralement d'hypothèses qu'il faut vérifier avant de pouvoir appliquer le théorème. Par exemple à la question 2 de l'exercice 5, il fallait, après avoir défini des fonctions f et g adaptées, vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et $g' \neq 0$, avant de pouvoir conclure.
- L'expression "posons" pose encore problème bien souvent. On l'utilise pour *définir* un nouvel objet. Il est donc étrange de lire "posons $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX = Y$". Il faudrait plutôt écrire "résolvons, pour $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $PX = Y$".
- Un équivalent est un résultat plus fort qu'une limite. Par exemple, pour affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\frac{1}{n}) = 0$, il n'est pas du tout nécessaire d'utiliser l'équivalent $\sin(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, une composition de limites suffit.
- Lorsqu'on énonce un sens de variation ou une limite d'une suite (u_n), il est question de la suite en elle-même, pas de son terme général. Ainsi les phrases "(u_n) est croissante" ou "$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$", ne dépendent pas de n, au sens où on peut les écrire aussi "(u_p) est croissante" ou "$u_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$". En conséquence, il n'y a pas de raison de faire précéder ces phrases d'un "$\forall n \in \mathbb{N}$".
- $\boxed{\text{PUL}}$: l'unicité de la limite d'une suite (u_n) ne signifie pas que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Cela signifie que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $\ell = \ell'$. Cela intervient donc dans le cadre des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ de la manière suivante : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors
  - d'une part $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (sans parler d'unicité de la limite)
  - et d'autre part $u_{n+1} = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell) = \ell'$ (par continuité de la fonction f en ℓ)

  Donc, par unicité de la limite (de la suite (u_{n+1})) on a $\ell = \ell' = f(\ell)$.
- $\boxed{\text{MAR}}$: toujours à propos du point ci-dessus, dans l'exercice 4 on avait $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2}$ c'est-à-dire $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{x + x^2}$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors pour conclure que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\ell + \ell^2}$ encore faut-il que f soit continue en ℓ donc que $\ell + \ell^2 \geq 0$. Ici, il fallait expliquer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors le fait que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ implique $\ell \geq 0$ donc $\sqrt{\ell + \ell^2}$ existe bien.
- $\boxed{\text{ABBA}}$: Pour montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on peut exhiber une matrice B telle que $AB = I_n$ <u>et $BA = I_n$</u>. Vérifier uniquement que $AB = I_n$ n'est a priori pas suffisant. En fait, un théorème affirme que ça l'est, mais il n'est pas explicitement au programme en BCPST ; mieux vaut donc mentionner les deux sens dans l'exercice 2 question 4, d'autant que ça ne prend pas plus de temps.
- $\boxed{\text{ARCT}}$: la fonction arctan doit être connue !